題名	代数解析と 50 年
Title	Fifty Years with Algebraic Analysis
著者名	柏原 正樹
Author(s)	Masaki Kashiwara
言語 Language	日本語・英語　Japanese, English
書名	稲盛財団 ： 京都賞と助成金
Book title	The Inamori Foundation : Kyoto Prize & Inamori Grants
受賞回	34
受賞年度	2018
出版者	公益財団法人 稲盛財団
Publisher	Inamori Foundation
発行日 Issue Date	8/31/2019
開始ページ Start page	142
終了ページ End page	165
ISBN	978-4-900663-34-3

代数解析と 50 年

柏原正樹

このたび、基礎科学部門数理科学分野で第34回京都賞を受賞できましたことを大変光栄に存じます。そして、私を選んでくださった選考委員の方々に感謝の意を表します。

この機会に、この50年あまりの数学研究を思い返してみたのですが、どれだけまわりの方々に助けられたか、またどんなにすばらしい機会に恵まれたのかを痛感いたしました。

佐藤幹夫先生との出会い

私は、1965年に東京大学に入学し、1967年に数学科に進学しました。当時は、まだ数学者になろうとは考えてもみませんでした。大学４年の1968年に佐藤幹夫先生と出会ったのが、私の方向を決める決定的な要因となりました。

これは佐藤先生との写真ですが、この当時からたぶん10年ほど経った頃の写真だと思います(Fig. １)。

佐藤先生との写真（1985年頃）
With Prof. Sato around 1985
Fig. 1

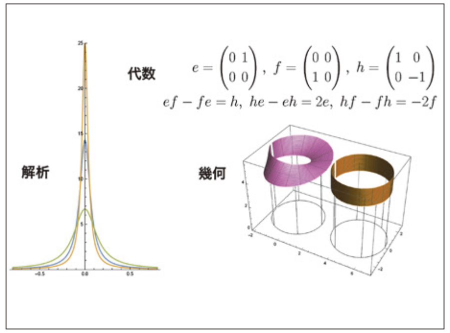


Fig. 2

佐藤幹夫先生は、代数解析の創始者です。

数学は、おおまかに言えば、代数、幾何、解析の三つの分野に分かれます(Fig. ２)。代数では、数とその演算を通常の数以外のものに拡張して研究します。ここでは、行列を例に挙げています。行列の場合には、かけ算の順序を変えると、その結果が変わってきます。そういう新しい現象が現れます。幾何は、図形に関する学問です。数学では変化する量を関数と言いますが、それを研究するのが解析学です。ここではその関数のグラフを図に描いています。

代数解析については、また詳しく述べますが、解析学の奥に潜む本質を代数学を使って研究する数学といっていいでしょう。

Fifty Years with Algebraic Analysis

Masaki Kashiwara

It truly is a great honor for me to receive the 2018 Kyoto Prize in the Mathematical Sciences field of the Basic Sciences category. I would like to express my heartfelt gratitude to the selection committee members who chose me.

I took this magnificent opportunity to reflect on my more than fifty-year career as a mathematician. In so doing, I was astonished to realize how much support from others and how many wonderful opportunities I have been blessed with along the way.

Encounter with Dr. Mikio Sato

In 1965, I matriculated at the University of Tokyo; then, in 1967, I joined the Mathematics Department. At that time, I did not have the slightest inclination to become a mathematician. What ultimately triggered my choosing that career path was a chance meeting with Dr. Mikio Sato in 1968, when I was a senior student.

This is me posing for a photo with Dr. Sato. I believe that it was taken some 10 years after our first encounter (Fig. 1).

Dr. Sato was the founder of the field of algebraic analysis.

Roughly, mathematics can be subdivided into the three categories of algebra, geometry, and mathematical analysis (Fig. 2). In algebra, you expand numbers and their mathematical operations into something other than the ordinary numbers for research purposes. Cited here as an example is a matrix. In a matrix, if you change the order of multiplication, you get a different product; that is, a new phenomenon is generated. Geometry is the study of figures. In mathematics, we call variable quantities functions and analysis is the study of functions. Illustrated in this slide is a graph of a function.

I will return to the subject of algebraic analysis in more detail later but, for now, suffice to say that it is a field of mathematics for studying–using algebra–essential qualities that lie deep within mathematical analysis.

Research into algebraic analysis

Dr. Sato was a great mathematician who possessed tremendous creativity and unique perspectives.

Toward the end of the 1950s, Dr. Sato introduced what is now known as Sato's hyperfunction, thereby expanding the concept of a function to its limit. In 1960, he also indicated the importance of *D*-modules in a colloquium of Department of Mathematics, the University of Tokyo. A *D*-module is basically the object of algebra but he suggested that the true essence of mathematical analysis could be captured by using it, thus

代数解析の研究

佐藤先生は、大変独創性豊かな大数学者です。

佐藤先生は、1950年代の終わりに、佐藤の超関数と呼ばれるものを導入して、関数の概念を極限にまで拡張されました。また1960年の東京大学数学教室の大談話会で、*D*加群の重要性を指摘されました。*D*加群は代数の対象ですが、佐藤先生はそれを用いることによって解析学の本質を捉えることができることを示唆し、その後の代数解析の方向性を示されたのです。

これはその大談話会の記録です(Fig. 3)。当時助手だった小松彦三郎先生が取られたノートです。

小松彦三郎先生はその後佐藤の超関数を研究しておられました(1935- 当時は30代)。1967年、私が大学3年の時に、アメリカ滞在から帰ってこられ、佐藤の超関数の講義を始められました。私もそれを聴講しています。そして、その翌年1968年春から佐藤先生とともに代数解析のセミナーを開始されたのです。

これは当時の佐藤先生と小松先生の写真です。お二人が朝日賞を受賞されたときのものです。左側が佐藤先生、右側が小松先生です。これは、このお二人が超局所関数について議論している写真です(Fig. 4)。

代数解析セミナー

この代数解析のセミナーは、毎週誰かが、関連する話題について1時間の講演をするというもので、講演途中の質問も多く大変活発なセミナーでした。

そこに積極的に参加していたのが、私の1年先輩の河合隆裕さんです。当時河合さんは修士1年だったのですが、既にそのセミナーの主要メンバーでした。河合さんに、このセミナーへの参加を強く勧められ、このセミナーに出席するようになりました。これが代数解析を始めるきっかけでした。

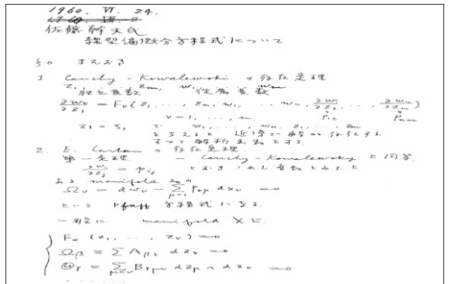
また、このころから、数学者になることを考え始めたのです。

超局所関数

佐藤先生は、1969年の始めに、超局所関数という画期的なアイデアを提出されました。これは、野球に例えれば、“満塁場外ホームラン”といえるでしょう。この超局所関数が、超局所解析の発端であり、その後の解析学全般に大きな影響を与えただけでなく、他の分野にもいろいろな形で波及していきました。

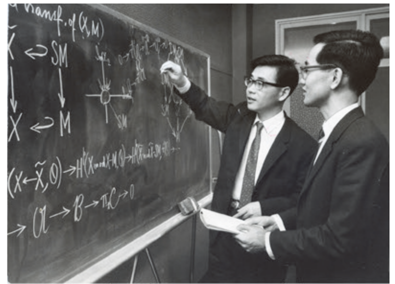
illuminating the future direction for algebraic analysis.

These are the notes from that colloquium which were taken by then Assistant, Dr. Hikosaburo Komatsu (Fig. 3).



小松先生による大談話会記録
Colloquium talk noted by Komatsu

Fig. 3



朝日賞受賞時(1970)の両先生
Sato and Komatsu(1970) 朝日新聞提供

Fig. 4

Dr. Hikosaburo Komatsu (born 1935) was in his 30s at that time. He later went on to study Sato's hyperfunction. In 1967, while I was a junior at the university, he returned from the U.S. to initiate classes in that subject, which I also attended. In the following spring of 1968, he and Dr. Sato jointly launched a seminar on algebraic analysis.

This is a photo of Dr. Sato (left) and Dr. Komatsu (right) on the occasion of their receiving the Asahi Prize. They were discussing microlocal function when the photo was taken (Fig. 4).

Algebraic analysis seminars

Guest speakers were invited to the weekly algebraic analysis seminars to give one-hour lectures on relevant topics. These were highly interactive seminars with many questions being asked by the participants during the lectures.

One of the most active participants was Takahiro Kawai, who was my senior by one year. He was in his first year of the Master's Program but he had become one of the key members of the seminar series. I began attending the seminars at his insistence and that is what triggered my interest in algebraic analysis.

It was also around that time that I began giving serious consideration to a career as a mathematician.

Microlocal function

At the beginning of 1969, Dr. Sato presented an innovative idea called microlocal

そして、この頃から、私は、佐藤先生、河合さんと共同研究をするようになっていったのでした。

しかし、このころの指導教官は、代数幾何の小平邦彦先生でした。

小平先生のセミナー

小平先生は、20世紀の代数幾何をつくるのに大きな貢献をされた大数学者で、1954年にフィールズ賞を受賞しています。アメリカで活躍されていましたが、1967年に日本に帰られたところでした。

これはその当時の小平先生とFriedrich Hirzebruchの写真です(Fig. 5)。このころは航空運賃が高かったので、海外に行けば長期滞在するのが普通でした。Hirzebruchも1972年の冬に1カ月間東京大学に滞在していました。これはその時の写真です。

小平先生とヒルゼブルフ(1972)
Kodaira with Hirzebruch(1972) 東京大学数理科学研究科提供

Fig. 5

丁度このころ、Phillip Griffiths(1938-)が周期写像に関する論文を次々と書いて、そのプレプリントを毎月のように小平先生に送って来ていました。小平先生もこれにはあきれておられました。Griffithsの論文を1学期ほど小平先生の学生のセミナーで読みましたが、結局、小平先生の指導を受けたのは、その時だけでした。

そのころは、もっぱら佐藤先生と河合さんの指導のもと、超局所解析の研究をしていたのでした。

京都での研究

佐藤先生は、1970年に河合さんとともに、京都大学数理解析研究所に移られました。私もその翌年1971年に修士を修了し、数理解析研究所に助手として移りました。それから数年間、佐藤先生、河合さんとともに、京都で超局所解析の建設に熱中した

function. To use a baseball metaphor, it was an out-of-the-park grand slam. From microlocal function developed microlocal analysis and that concept not only had a significant impact on mathematical analysis in general but also caused a ripple effect in other fields in various ways.

That, approximately, was when I started to get involved in joint research with Drs. Sato and Kawai, even though my advisor at that point was a professor of algebraic geometry by the name of Kunihiko Kodaira.

Professor Kodaira's seminars

Professor Kodaira was a notable mathematician who made significant contributions to the development of 20th century algebraic geometry, for which he was awarded a Fields Medal in 1954. He worked in the U.S. for a time but returned to Japan in 1967.

This is a photo from that time of Professor Kodaira and Dr. Friedrich Hirzebruch (Fig. 5). Back then, airfares were quite expensive and so it was normal to stay at a particular destination for quite a long time when one traveled abroad. Dr. Hirzebruch was no exception; he stayed at the University of Tokyo for one month in the winter of 1972. This photo was taken at the time.

Right around then, Dr. Phillip Griffiths (born 1938) wrote a series of papers on period mapping, the pre-prints of which he sent to Professor Kodaira almost every month. I remember that it left Professor Kodaira at a loss for words. I had to read Dr. Griffiths' papers in Professor Kodaira's seminar for one semester but that was the only occasion on which I had the pleasure of receiving guidance from Professor Kodaira.

That was because I spent most of my time in those days doing research into microlocal analysis under the supervision of Drs. Sato and Kawai.

Doing research in Kyoto

In 1970, Dr. Sato and Dr. Kawai both moved to Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University. In the following year, 1971, I completed my Master's Program at the University of Tokyo and secured a position as an Assistant at RIMS. For several years thereafter, Drs. Sato and Kawai and I were immersed in the building of microlocal analysis in Kyoto.

The outcome of our joint efforts was a 250-page paper published by Springer, which was included in the proceedings of the Taniguchi Symposium in Katata. This paper is known as "SKK," combining the initials of "Sato," "Kawai," and "Kashiwara."

のでした。

その成果は、出版社Springerから、250ページの論文となって、堅田での谷口シンポジウムのプロシーディングに採録されました。この論文は、佐藤、河合、柏原の３人の頭文字をとって、SKKとして知られています。

これはSKKが掲載されたプロシーディングです。この写真では厚さが分かりませんが、4、5cmある分厚いものです(Fig. 6)。

この時期に、佐藤先生、河合さんと一緒に数学をできたことが、私の数学での人生にとって大きな糧となりました。

研究の明け暮れ

この当時は、毎日佐藤先生のオフィスでのセミナーに明け暮れました。私たち３人が、佐藤先生のオフィスに午後に集まり、前日からの各自の研究の成果を報告しあい、そのあと討論を重ねるという形式でした。

佐藤先生のオフィスは、東に理学部植物園と面し、その向こうに大文字を望むという大層景色の良いオフィスでした。

これは現在の数理研から望んだ大文字です(Fig. 7)。ご覧のように、現在は当時よりも木が成長して視界を遮るようになっています。

そして晩は、大学近くの銀仙という食堂で夕食をとりながら、数学の話を続けたものです。

この時期、京都が超局所解析における世界の中心でした。私たちは、超局所というアイデアを駆使して、世界の最先端を走っていたのです。丁度この時期に佐藤先生に学び、一緒に仕事ができたことは、大きな幸運であったと思います。

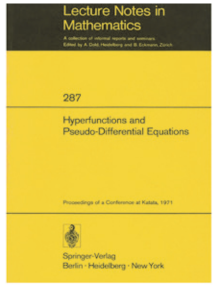
デルタ関数

私の数学の土台となった佐藤先生の数学における業績を一つ紹介したいと思います。できるだけ初等的に説明しようと思いますが、数学者でない方々を相手にどれだけ成功するか分かりません。

関数というのは、時間や空間の各点に数値を対応させるやり方を言います。例えば、新幹線で移動するとき、各時刻に列車の速度を対応させれば、それは関数になります。また、京都市内の各時刻と各場所にその時そこでの温度を対応させれば、これも関数になります。

This is the proceedings containing the SKK paper (Fig. 6). It is hard to gauge from this photo how bulky the document is but it is actually four to five centimeters thick.

In retrospect, the experience of having worked on mathematics with Drs. Sato and Kawai is what would sustain my career as a mathematician.



SKK掲載のプロシーディング
Springer Lecture Notes 287
Fig. 6

数理研から望む大文字
Mt. Daimonji from RIMS
Fig. 7

Day in, day out in the office

After moving in Kyoto, I did nothing every day but take part in seminars at Dr. Sato's office. The three of us would get together in his office, in the afternoon, to share the previous day's results of our respective research efforts, followed by exhaustive discussions.

Dr. Sato's office had a great view—facing Kyoto University's Graduate School of Science Botanical Gardens to the east, beyond which was Mount Daimonji.

This is Mount Daimonji as viewed from RIMS, today (Fig. 7). As you can see, the trees have grown taller to block the view from the office.

In the evening, we would dine together at a restaurant near the university, called Ginsen, where our mathematical discussions would continue.

During this period, Kyoto was the world center of microlocal analysis. We made full use of the idea of "microlocal" to shape the mathematical frontiers of the world of that time. I was immensely lucky to have been taught by and worked with Dr. Sato during those golden years.

Delta function

Now, let me describe one of the mathematical achievements of Dr. Sato, which would form the foundation for my mathematical research. I will try to speak in layman's

デルタ関数というのは、ある時刻、例えば原点 $x=0$ で無限大、その他の点では、0の値をとる関数です。ある時刻に、静寂を破って大音量が聞こえ、パッと止むというのが、デルタ関数の近似といえるでしょう（Fig. 8）。

これはデルタ関数の図です。このように原点の外では0ですが、原点で無限大に大きくなり、その後また0に戻っていくのです。

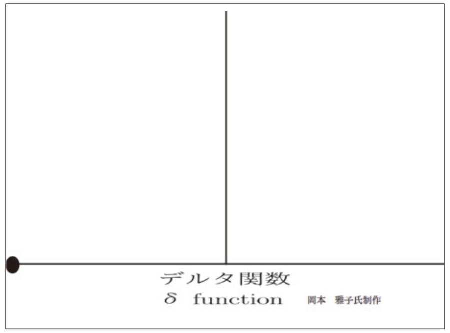


Fig. 8

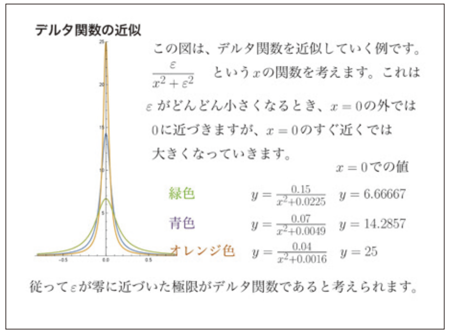


Fig. 9

佐藤の超関数

デルタ関数は $x=0$ に特異性を持ち、通常の意味での関数ではありません。これをどう解釈するかというのは20世紀始めの数学上の大きな問題でした。フランスの数学者Laurent Schwartzは、超関数（distribution）というやり方でその解釈をしました。佐藤先生は、これを全く新しいやり方で解釈したのです。それが佐藤の超関数（Sato's hyperfunction）と呼ばれるものです。今からそれをご説明しましょう。

デルタ関数の近似

この図はデルタ関数を近似していく例です（Fig. 9）。$\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ という x の関数を考えます。この ε というのはギリシャ文字で、数学では小さな量を扱うときに使うことが非常に多いです。この ε がどんどん小さくなるとき、$x=0$ の外では0に近づきますが、$x=0$ のすぐ近くでは大きくなっていきます。これはその例ですが、緑色の小さな山の場合は $\varepsilon=0.15$ の時です。ε がさらに小さい青色の図のとき、原点の外では小さくなり、原点では大きくなります。さらに ε を小さくして $\varepsilon=0.04$ にすると、原点では非常に大きくなり、その他では小さくなります。このように、ε が0に近づいた極限がデルタ関数であると考えられます。

terms, but I'm not sure how successful my attempt will be for those who are not mathematicians.

A function is how you make points correspond to numerical values in time and space. For example, when you are traveling on a Shinkansen bullet train, you'll get a function if you have the train's speed correspond to each time. Similarly, if you have a temperature reading at a given time and location in Kyoto City corresponding to the time and location, you'll get a function.

A delta function is a function whose value is infinite at one time, say, origin $x=0$, but is 0 at other points. An approximation of a delta function is when you suddenly hear a loud sound after dead silence, which stops instantly (Fig. 8).

This is a graph of a delta function. As you can see, the value is 0 at points other than the origin, but increases infinitely at the origin and returns to 0 afterward.

Sato's hyperfunction

Delta functions have a singularity at $x=0$, so they're not a function in the ordinary sense of the word. How to interpret this was a major mathematical issue in the early 20th century. A French mathematician by the name of Laurent Schwartz used "distribution" to interpret this. Dr. Sato applied a totally new approach to this issue, which is now referred to as Sato's hyperfunction. Let me explain it.

Approximation of delta function

This graph gives you an example of an approximation of a delta function (Fig. 9). Here, we have this function of x, which is $\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$. Now, this ε is a Greek character that is very often used to deal with a minute quantity in mathematics. As this ε gets smaller and smaller, the value of the expression approaches 0 when not $x=0$ but gets larger as it gets extremely close to $x=0$. In this example, the small green peak is reached when $\varepsilon=0.15$. In the blue graph, where ε is smaller, the value becomes small outside of the origin but larger at the origin. If you make ε even smaller, to $\varepsilon=0.04$, the value becomes very big at the origin but small otherwise. In this way, the limit state where ε is very close to 0 is a delta function.

Embedding real numbers into complex numbers

Now, how can we interpret this function of x; that is, $\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$? Dr. Sato came up with the innovative idea of embedding space of real number into space of complex number. In this graph, here we have space of real number, or the real axis, which is shown as a

実数を複素数に埋め込む

さて、$\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ という x の関数はどう解釈できるでしょうか。佐藤先生は、これを実数の空間を複素数の空間に埋め込んで考えるという革新的なアイデアを出されました。この図はここに、実数の空間、実軸と呼ばれるもので、1 次元の黒い線で表しています(Fig. 10)。その周りを複素数の平面が取り巻いています。この実数というのは、(複素平面を)緑色の上半平面と黄色の下半平面の二つに分けます。さて、実数は、普通に見える世界を描くために生まれた数です。複素数は、それに比べて、分かりにくいものです。しかし数学では、複素数は実数以上に重要な数です。それは、多項式方程式が必ず複素数の範囲で解けるからです。

実数より簡明な複素数の世界

この例では、$x^2-1=0$ の場合を考えています(Fig. 11)。その場合には、ご存知のように 1 と -1 の実数の解があります。一方、$x^2+1=0$ という方程式では、実数の範囲では解はありません。しかし、複素数の範囲まで拡げると、i と $-i$ という二つの解があります。ここで i は -1 の平方根で、虚数単位と呼ばれています。x^2-1 は実数の範囲では $(x-1)(x+1)$ と分解されます。実数の範囲では x^2+1 は分解されませんが、複素数の範囲まで拡げると $(x-i)(x+i)$ という二つの一次式の積に分解されます。

このように複素数まで数を拡げると、実数の範囲では解があったりなかったりと複雑であった状況が、複素数では透明、簡明になります。このように簡明な状況を作り出すというのは、数学において非常に重要でもあり、またそれを作り出すことは楽しいことでもあります。

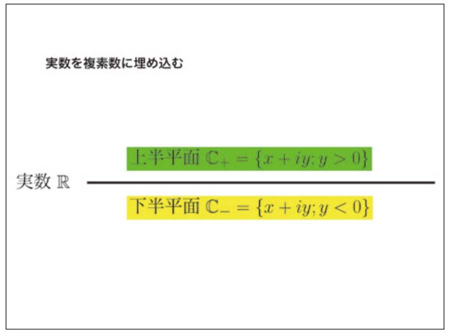


Fig. 10

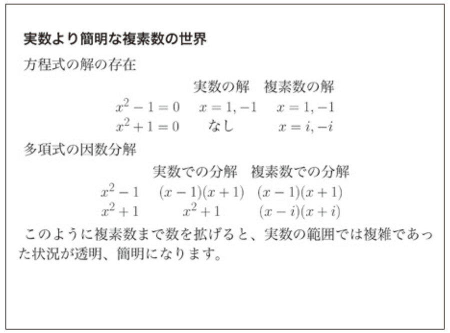


Fig. 11

one-dimensional black line (Fig. 10). Surrounding the black line are planes of complex numbers. Now, real numbers divide the complex number planes into the upper half planes in green and the lower half planes in yellow. Real numbers were created to describe the world as we normally see it. In contrast, complex numbers are rather hard to understand. Yet, in the mathematical world, complex numbers are more important than real numbers because polynomial equations can always be resolved if we use complex numbers.

The world of complex numbers is clearer than that of real numbers

Let's say we have an equation, $x^2-1=0$ (Fig. 11). As you know, this equation has real number solutions of 1 and -1. On the other hand, the equation $x^2+1=0$ does not have real number solutions. However, if we expand the scope of solutions to include complex numbers, we have two solutions of i and $-i$. Now, i is a square root of -1 and is called the imaginary unit. In the scope of real numbers, x^2-1 can be factorized into $(x-1)(x+1)$. On the other hand, x^2+1 cannot be broken down if we use real numbers only, but it can be factorized into $(x-i)(x+i)$, which is a product of two linear expressions if we expand the scope to include complex numbers.

As this shows, complex situations where sometimes we have solutions and sometimes we don't if we use only real numbers can be made transparent and clear if we use complex numbers as well. In mathematics, it is very important to create a simple situation like this; not to mention… it's fun!

Now, if we extend the scope to complex numbers, $\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ can be expressed as the difference between $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ and $\frac{1}{x-i\varepsilon}$ ($\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{i}{2}(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon})$) (Fig. 12). The limit of $\varepsilon \to 0$ is a delta function. By the way, I should explain what $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ is. It is the value of $z=x+i\varepsilon$ when it is $\frac{1}{z}$ on the upper half plane in green, whereas $\frac{1}{x-i\varepsilon}$ is the value when $z=x-i\varepsilon$, which is on the lower half plane in yellow. The difference between

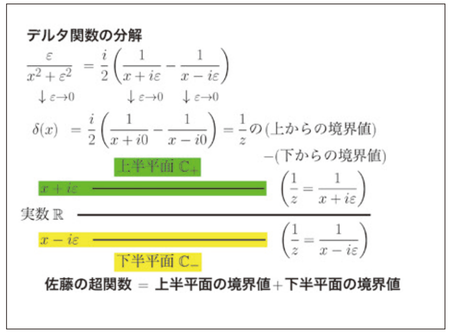


Fig. 12

さて、$\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ というのは、複素数の範囲まで拡げると $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ と $\frac{1}{x-i\varepsilon}$ の差で書けます($\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{i}{2}(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon})$)(Fig. 12)。その $\varepsilon\to 0$ の極限がデルタ関数というわけです。ところで、$\frac{1}{x+i\varepsilon}$ が何かといいますと、緑色の上半平面での、$\frac{1}{z}$ としたときの $z=x+i\varepsilon$ の時の値です。一方、$\frac{1}{x-i\varepsilon}$ は $z=x-i\varepsilon$ の時の値、黄色の下半平面での値です。この二つの境界値の差がデルタ関数であると言えるのです。これが佐藤先生が見出した解答で、複素数まで拡げて一般化した超関数を、上半平面で定義されたよい関数と下半平面で定義されたよい関数の境界値、その二つの境界値の和、あるいは差で書こうというのが佐藤先生のアイデアです。

佐藤の超関数の革新性

実数を複素数に埋め込んで考えるというのは、代数では古典的な考え方です。これを解析で行ったのが、佐藤超関数の革新的なところでした。

この考え方は、線形偏微分方程式においても非常に有効に使われます。代数方程式の場合と同じように、線形偏微分方程式は、複素数の空間ではきれいに解けるのです。それは現在、Cauchy-Kovalevskayaの定理として知られています。CauchyはGaussと並んで現代数学の基礎を作った数学者です。Kovalevskayaは女性数学者の草分けで、解析学において非常に大きな業績をあげています(Fig. 13)。

このCauchy-Kovalevskayaの定理を用いれば、複素世界での解の状況は、良く分かります。これから、原理的には、実の世界の状況が分かります。実の世界の関数は複素の世界の関数の境界値として得られますから、原理的には、複素の世界での解の状況から実の世界の解の状況が分かります。しかし、それは実行するのは容易ではなく、ここは代数の助けが必要となる所です。これをお題目に終わらせず、実行するためには、後にPierre Schapiraとの共同研究で、層の超局所的研究が成功するまで待たねばなりませんでした。

これはSchapiraと私のツーショットです。Schapiraの家で1980年ごろ撮られたものです(Fig. 14)。

パリのカフェで

すでに述べましたように、佐藤先生は1960年の東大数学科における大談話会でD加群の重要性を指摘されていました。

these two boundary values is a delta function. This is the solution that Dr. Sato arrived at. He hit upon the idea of describing a hyperfunction that has been generalized when the scope is extended to include complex numbers by using either a sum or the difference between two boundary values of a good function defined on the upper half plane and another good function defined on the lower half plane.

Innovative nature of Sato's hyperfunction

It is a classical approach in algebra to embed real numbers into complex numbers, but what made Sato's hyperfunction innovative was that he did this for analysis.

This approach can also be used very effectively in linear partial differential equations. As in algebraic equations, linear partial differential equations can be solved beautifully in space of complex numbers. This is now known as the Cauchy-Kovalevskaya theorem. Augustin-Louis Cauchy, along with Carl Friedrich Gauss, was a mathematician who built the foundation of modern mathematics. Sofia Kovalevskaya was a pioneering female mathematician who made remarkable achievements in mathematical analysis (Fig. 13).

If we use this Cauchy-Kovalevskaya theorem, we can clearly see the state of solutions in the world of complex numbers. From this, we can see the state of the real world in principle. A function in the world of real numbers is given as a boundary value of a function in the world of complex numbers and so we can know the state of solutions in the world of real numbers based on the state of solutions in the world of complex numbers. But, this is a case of easier said than done and we need the assistance of algebra. For us to make this a reality beyond conjecture, we had to wait until we had succeeded in microlocal research of sheaves through joint research with Professor Pierre Schapira.

This is a photo of Professor Schapira and me together, taken around 1980 at his house (Fig. 14).

コーシーとコワレフスカヤ
Cauchy and Kovalevskaya

Fig. 13

シャピラ の家で(1980年頃)
at Schapira's home around 1980

Fig. 14

Dはdifferentail（微分）のDで、D加群は線形偏微分方程式と呼ばれるものを、代数的に定式化したものです。佐藤先生が、D加群の重要性を指摘し、私がそれを実際の形にしたといっていいと思います。

その理論は構築したのですが、それを応用する機会になかなか巡り合えませんでした。その機会は、1979年に訪れました。そのころ、パリに滞在していたのですが、ある時Brylinskiという数学者が、面白い話があるので会えないかと言ってきたのです。そこで、パリ第六・七大学前のカフェ（Relais Jussieu；ジュッシュー）で話を聞きました。Relais Jussieuですが、現在はもうなくなっています。

カジュダン・リュスティッヒ予想

Brylinskiは、その前年に提唱された、カジュダン·リュスティッヒ予想の話をし、その証明に、D加群が使える可能性を示唆しました。実はこの示唆は、非常にうまくいき、D加群が大きな役割を果たしました。

この予想は、標準的表現と呼ばれるものがどう既約表現に分解されるかという問に対する答えが、カジュダン·リュスティッヒ多項式と呼ばれるもので与えられるだろうというものです。これを例え話で説明してみましょう。

標準的表現は、分子に例えることができます。分子はいろいろな種類の原子が集まって成り立っています。この原子に当たるのが、既約表現です。では、与えられた分子を構成しているそれぞれの種類の原子は何個あるかというのが問題です。この数を予想したのがカジュダン·リュスティッヒ予想です。

***D*加群が代数と幾何をつなぐ**

標準的表現の中の既約表現の数というのは、代数的な量です。一方、カジュダン·リュスティッヒ多項式というのはもともと幾何を使って得られました。ここに図示しましたように、この標準表現の中の既約表現の数というのは代数に属しています（Fig. 15）。カジュダン·リュスティッヒ多項式というのは、実は旗多様体という図形を用いて定義されますから、幾何に属します。この代数と幾何というのは遠く離れています。従って、このカジュダン·リュスティッヒの予想というのは、個数が多項式で書けるだろうというこの二つの間の関係を示しています。しかし代数と幾何というのはかなり離れたもので、この間に関係を直接つけるというのはなかなか難しいものがあります。それを行ったのがD加群です。

At a café in Paris

As I mentioned earlier, Dr. Sato had indicated the importance of D-modules in a colloquium of Department of Mathematic, the University of Tokyo in 1960.

D standing for "differential," a D-module is an algebraic formulation of what is known as a linear partial differential equation. It would be fair to say that Dr. Sato indicated its importance and I shaped his idea into the current form.

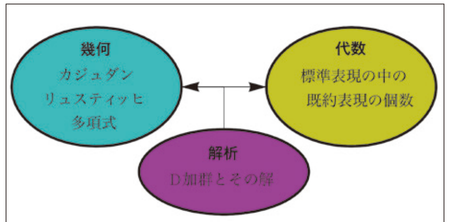
Though I managed to construct the theory, I didn't have an opportunity to apply it for a long time. Then, opportunity knocked in 1979. I was staying in Paris and a mathematician by the name of Jean-Luc Brylinski asked if we could meet because he had something interesting to tell me. So, I went to a café called Relais Jussieu near University of Paris 6 and 7 to find out what he had to share. Relais Jussieu no longer exists now.

Kazhdan-Lusztig conjecture

Professor Brylinski told me about the Kazhdan-Lusztig conjecture, which was presented in the previous year, and suggested a possibility of using D-modules to prove them. Actually, his suggestion worked out very well and D-modules played a major role in the proof.

They conjectured that an answer to the question of how what is called a standard representation can be decomposed into irreducible representations would be given by what was known as a Kazhdan-Lusztig polynomial. Let me explain this by way of analogy.

Standard representations can be compared to molecules. Molecules consist of a variety of atoms. Now, in this analogy, an atom corresponds to an irreducible representation. The question was how many atoms of each variety compose a given molecular. The Kazhdan-Lusztig conjecture was used to predict the numbers.



カジュダン・リュスティッヒ予想の解決
Kazhdan-Lusztig conjecture

Fig. 15

　*D*加群というのは代数に属しています。しかし、解析で重要なのはその解を考えることです。その解を得る手続きはまさに解析に属しています。そして、解が大域的、あるいは特異点の近傍での振る舞いを見ると、それは幾何に属しています。従って、*D*加群とその解を考えることにより、代数と幾何が結びつくのです。カジュダン·リュスティッヒ多項式とつながるのです。

　こうして、*D*加群を媒にして、カジュダン·リュスティッヒ予想を解くことに成功しました。これは、その後の、表現論での圏論的な問題の捉え方の嚆矢となりました。

フランス語の研修

　私が、初めて海外に出たのは、1972年でした。佐藤先生、河合さんと私が1972年の秋から73年の春までの１年間、フランスのNice大学のAndré Martineau教授に招かれたのです。

　Martineauは、フランスの数学者で、いち早く佐藤の超関数に着目していました。ただ悲しいことに、Martineauは、私たちがNiceに到着する３カ月前に癌でなくなったのです。

　佐藤先生と河合さんは、招聘教授として招かれたのですが、私は、フランス政府給費留学生でした。そのころ給費留学生は、３カ月の語学実習が義務付けられていました。私は、Besançonという町でフランス語の語学研修を受けることになりました。Besançonは、指揮者の小澤征爾が国際指揮者コンクールで優勝し有名になった所で、日本でも知っている方はいると思います。Besançonは川と城壁にとり囲まれた美しい町でした(Fig. 16)。

語学研修
Language training

Fig. 16

***D*-modules link algebra and geometry**

The number of irreducible representations within a standard representation is an algebraic quantity. The Kazhdan-Lusztig polynomial, on the other hand, was originally gained through geometric techniques. As illustrated here, the number of irreducible representations within a standard representation belongs to algebra (Fig. 15), whereas the Kazhdan-Lusztig polynomial belongs to geometry as it can be defined by using a figure called a flag manifold. Algebra and geometry exist on separate mathematic poles and the Kazhdan-Lusztig conjecture described the relationship between the two, which is to say that the number of irreducible representations could be gained by means of the Kazhdan-Lusztig polynomials. But, again, algebra and geometry are very distant from each other, so it was rather difficult to relate the two directly. Hence came *D*-modules.

D-modules belong to algebra but what is important for analysis is to find a solution. The process of finding a solution does in fact belong to analysis. If we consider the fact that the solution is global or how they behave near a singular point, they belong to geometry. Accordingly, if we take into account *D*-modules and their solutions, we can connect algebra and geometry. The geometric mode of the solution itself can be connected to the Kazhdan-Lusztig conjuncture.

Using *D*-modules in this way, we were able to solve the Kazhdan-Lusztig conjecture. It was a harbinger of a categorical approach to the representation theory that would come later.

Training in French

I first went abroad in 1972. Together with Drs. Sato and Kawai, I was invited to France by Professor André Martineau of Université Nice Sophia Antipolis for a year between fall 1972 and spring 1973.

Professor Martineau was a French mathematician who was among the first to take notice of Sato's hyperfunction. However, to our great sorrow, he died of cancer three months before we arrived in Nice.

Drs. Sato and Kawai were invited as professors but I was a student on a scholarship granted by the French government. At the time, such scholars were obliged to take a three-month language course. I took my course in French in a city called Besançon. That city became famous when the great conductor Seiji Ozawa won first prize in the International Competition of Orchestra Conductors, so I believe the name may sound familiar to some Japanese ears. Anyway, Besançon was a beautiful city, surrounded by a river and castle walls (Fig. 16).

ニース滞在

そのころ私は、英語も満足にしゃべれませんでしたが、フランス語も全然駄目でした。しかし、3カ月の語学研修をなんとか2カ月に減らしてもらって、9月にNice大学に向かったのでした。

Niceに1年滞在しましたが、フランス語は、全然しゃべれるようになりませんでした。まず、相手が何を言っているかが全く理解できませんでした。その後、京都に帰ってから1年ほどして、フランスを再び訪れたのですが、不思議なことに、聞き取りができるようになり、少ししゃべれるようになりました。その間フランス語をしゃべる機会はほとんどなかったのですから、不思議なものです。多分フランス語を脳が消化するのに、時間がかかったのではないかと思っています。

共同研究者であり、良き友人でもあるPierre Schapiraとはこの二度目のフランス滞在の時から実質的な研究交流が始まりました。

Schapiraとの共同研究

Pierre SchapiraはMartineauのもとで学位を取って、佐藤の超関数を研究していました。その関係で、堅田で1971年に開かれた谷口シンポジウムにも招かれています。そのときが、Schapiraとの交流の始まりでした。

既に述べましたように線形偏微分方程式の解は、複素数の空間ではきれいに解けます。それがCauchy-Kovalevskayaの定理でした。従って、原理的には、簡単な複素の場合から、実の場合の欲しい情報が得られるはずです。これが、お題目だけではなくて、実際に大きく進展したのは、Schapiraとの共同研究で、1982年に層の超局所解析に成功したからと言っていいでしょう。

局所と大域

層というのは、局所と大域をつなぐ数学で重要な言葉です。局所は、空間のある点のすぐ近くを見て分かる性質をいいます。大域というのは、空間をすべて見渡さなければ分からない性質をいいます。例えば、図形がつながっている(connected)というのは、大域的な性質です。

この図は普通の帯とMöbiusの帯を描いています。Möbiusの帯というのは、普通の帯を途中で切って捩って張り合わせてできたものです。局所的には、どちらも帯なので区別がつきませんが、大域的には、数学では向きがついているといい、違います(Fig. 17)。

Staying in Nice

At the time, I couldn't speak English well, let alone French. Yet, I managed to convince the authorities to shorten the duration of my language course from three to two months, and then I headed to Université Nice Sophia Antipolis in September.

I stayed in Nice for a year, but my spoken French didn't improve at all. I couldn't even understand what others were saying. Then, about one year after having returned to Kyoto, I revisited France. Strangely enough, that time around I was able to comprehend French and speak a bit as well. It was wondrous because I seldom had a chance to speak French between my visits to France. I guess it took some time for my brain to assimilate the language.

It was during this second stay in France that I began a working research exchange with Professor Pierre Schapira, my long-time joint researcher and a good friend.

Joint research with Professor Schapira

Professor Schapira was studying Sato's hyperfunction, having earned a degree under the guidance of Professor Martineau. Because of that, he was invited to the Taniguchi Symposium, which was held in Katata in 1971. I became acquainted with him on that occasion.

As I mentioned earlier, a linear partial differential equation can be beautifully solved in complex number space, as the Cauchy-Kovalevskaya theorem says. Accordingly, we should, in principle, be able to gain the information that we want in the world of real numbers from the world of simple complex numbers. It could be said that I was able to achieve a major breakthrough on this hypothesis when I succeeded in microlocal analysis of sheaves in 1982 through joint research with Professor Schapira.

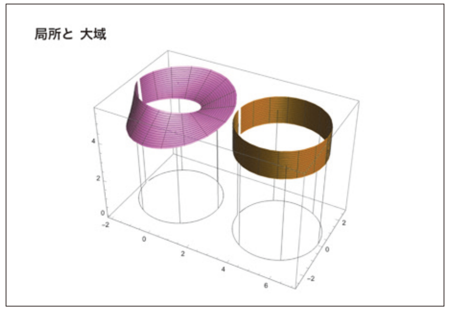


Fig. 17

層の歴史

層は、Lerayが導入し、Cartanがこれを用いて多変数関数論を建設したのでした。その際、岡潔の不定域イデアルという層の原始的なアイデアが大きな原動力となったと聞いています。

Lerayは層をフランス語でfaisceauと名付けました。これは束という意味です。層というのは、空間の各点に集合を対応させるやり方を言います。これを束に喩えて命名したのです。

日本語にこれを訳すときに、発音がfaisceauと似ているので、洒落で層という訳を考えたという話が残っています。しかし、私自身は本当かどうかは確認していません。

層の超局所解析

現代数学において、層は基本的な言葉となっています。もちろん、代数解析においても、層は不可欠な役割を果たしています。実は*D*加群と呼ばれるものも層の一種です。

超局所解析の発端は、実の空間の関数が複素領域のどの方向からの境界値の和で書けるかというのを、余方向という概念を用いて記述したことでした。

ここでは詳しく述べませんが、余接束、すなわち空間の点と余方向を込みにした空間で、層を詳しく解析する理論をSchapiraと開発したのです。それが層の超局所解析です。

これを用いれば、代数方程式の場合と同様に、比較的単純な複素の空間の場合から、線形偏微分方程式の解の実の空間での欲しい情報を取り出すことができます。

この超局所解析の考え方、あるいは層の超局所解析の考え方は、数学の他の分野でも盛んに使われるようになってきています。

40人あまりの共著者

現在こそ昔ほどではありませんが、数学者は、他の分野に比べて、共同研究を行うことがあまりありませんでした。私の場合は、数学者の中では共著の多い方で、40人程の研究者と共著論文を書いています。

この共同研究の中で、共同研究者から他の分野を教えてもらったことも大きな収穫でした。例えば、岡本清郷先生とは、超関数と表現論に関するHelgason予想と呼ばれるものを共同研究で解決しました。私はそのころ表現論は殆ど知らなかったのですが、その共同研究の中で、岡本先生に表現論を教えていただきました。岡本先生

Local and global

A sheaf is a key term in mathematics that connects local and global. Local refers to a property that may be revealed when zooming in at a point in space, whereas global means a property that can be seen only by viewing the whole space. For example, to say that figures are connected is a global property.

This illustration depicts an ordinary strip and the Möbius strip. The Möbius strip is created by taking an ordinary strip and giving it a half-twist, and then joining the ends of the strip to form a loop. Locally, both are strips and cannot be distinguished from one another. Globally, they are different as they are directed mathematically (Fig. 17).

History of sheaves

Originally introduced by Jean Leray, a sheaf was used by Henri Cartan to construct the theory of function of several complex variables. Someone once told me that a primitive idea about sheaves, called Kiyoshi Oka's indeterminate ideal, was a major impetus for this progress.

Leray named a sheaf as "faisceau," which is French for fascicle. A sheaf is about connecting individual points to certain sets in space. Hence, the name.

It has been said that, when they translated this term into Japanese, they decided to translate it as "*sō* (sheaf)" because the pronunciation is similar to the sound of "faisceau." However, I haven't been able to confirm if this is true or not.

Microlocal analysis of sheaves

In modern mathematics, sheaf is a basic term. Of course, it also plays a vital role in algebraic analysis. In fact, a *D*-module is one variety of sheaves.

Microlocal analysis started out as an effort to describe how the sum of boundary values from which direction in the complex domain can be used to write a function in the real number space by using the concept of co-direction.

I will not go into great detail, here, but Schapira and I developed a theory on detailed analysis of sheaves in a cotangent bundle; that is, a space that includes points in space and co-directions. That's the essence of microlocal analysis of sheaves.

Using this, we are able to get the information we needed on a solution to a linear partial differential equation in the real number space from a case of a relatively simple complex number space, as in the case of an algebraic equation.

This approach of microlocal analysis, or microlocal analysis of sheaves, has found an increasing number of applications in other mathematical fields, as well.

は、私に懇切丁寧に表現論を教授してくれたのです。ある意味ではこのように研究しながら学ぶというのは非常に効率のいい方法です。

このようにたくさんの共同研究者に恵まれたことも私の幸運の一つであったと思います。この機会を借りて、共同研究者の方々に感謝の意を表して話を終わりたいと思います。ご清聴ありがとうございました。

Over 40 co-authors

It may not be the case today but, in the past, mathematicians rarely conducted joint research to the same degree as scientists in other fields. However, I have had the privilege of working on many co-written papers with mathematicians and I have co-authored papers with some 40 researchers.

It has been tremendously beneficial for me to learn about other fields from my co-researchers. For example, joint research with Professor Kiyosato Okamoto was instrumental in resolving what was called the Helgason conjecture on hyperfunction and the representation theory. I had a very rudimentary idea of what the representation theory was, back then, but Professor Okamoto was kind enough to walk me through it during our joint research. He was so generous and took excellent care of me. In a sense, learning as you perform research is a very efficient way of going about it.

I feel that it has been my great good fortune to have worked and studied with so many talented joint researchers. I would like to take this opportunity to express my sincere gratitude to all of them.

Thank you.

稲盛財団2018——第34回京都賞と助成金

発　　行　2019年８月31日
制　　作　公益財団法人 稲盛財団
〒600-8411　京都市下京区烏丸通四条下ル水銀屋町620番地
Tel: 075-353-7272　Fax: 075-353-7270
E-mail press@inamori-f.or.jp　URL https://www.inamori-f.or.jp
ISBN978-4-900663-34-3 C0000