題名	空間のイメージを超えて
Title	Spaces Beyond the Space
著者名	ミハイル・レオニドヴィッチ・グロモフ
Author(s)	Mikhael Leonidovich Gromov
言語 Language	日本語・英語　Japanese, English
書名	稲盛財団：京都賞と助成金
Book title	The Inamori Foundation: Kyoto Prizes & Inamori Grants
受賞回	18
受賞年度	2002
出版者	財団法人 稲盛財団
Publisher	The Inamori Foundation
発行日 Issue Date	3/1/2004
開始ページ Start page	168
終了ページ End page	200
ISBN	978-4-900663-18-2

空間のイメージを超えて

ミハイル・レオニドヴィッチ・グロモフ

私たちは数学者がユークリッド空間と呼ぶ3次元空間に住んでいます。この名前はアレキサンドリアの幾何学者であったユークリッドに敬意を表してつけられたものですが、彼は、2000年以上も前に、私たちの持つ直感的な空間のイメージを公理として表そうと試みました。しかし、20世紀、特にベルンハルト・リーマンの研究以降、空間の概念はユークリッドの原点からどんどん離れて発展し続けています。それは当初、純粋数学の必要からでしたが、その後、他の科学、まずは物理、続いて化学、生物学、経済学等の発展によって促進されてきました。

数学やその他の科学で出会うほとんどの空間は、3次元空間の中で視覚化することができません。曲線や面というようなものではないのです。したがって映像的なイメージとして私たちに入ってこないのです。たとえ、そのような空間がユークリッド空間に密接に関係していて、私たちが生活のあらゆる瞬間にそれらに依存していたとしても、私たちはそれらを意識的に認識していません。それどころか、私たちはその動作の間、それらに気づくことなくそれらの性質を利用しているのです。(泳ぐ魚が水の存在に気がつかないのと同じことです。)

それでは、どうすればそのような空間を理解できるのでしょうか。どのようにして研究すればよいのでしょうか。私たち幾何学者は、その想像力を持って得た知識をいかにして機械に伝えればよいのでしょうか。例えば、動物や人間のような敏捷さを持って空間を移動する能力をロボットにどのようにしてつけるのでしょうか。

私たちの助けとなるのは、そして私たち幾何学者が日常の空間のイメージをはるかに押し広げて、現代の幾何学を構築し続けていくことができるのは、私たち生命の持つ視覚や運動系の中に無意識のうちに潜んでいる空間の感覚の驚くべき柔軟性といえるでしょう。幾何学のある分野を研究することは自転車に乗ることを学ぶのによく似ています。最初はとても困難に見えるのですが、学んでしまえばどうということはないのです。ただし幾何学のそれといえば、概念という自転車の上に次々とそれを積み上げた自転車に曲乗りするようなものです。

この講演では、皆さんに易しい(それほど易しくないかもしれませんが)自転車操縦法をお教えするつもりです。目的は2つあります。まず、通常の三次元空間がどれほど私たちの想像以上に豊か、かつ複雑であるかをご理解いただくこと。次に、私たちの周りにある、目に見えない空間の世界を覗いていただくことです。こうした世界は肉眼では見ることはできませんが、私たちの空間に対する直観力を適切な幾何学的言語に置き換えることによって、三次元の世界で見ることができます。

Spaces beyond the Space

Mikhael Leonidovich Gromov

We live in three-dimensional space, called by mathematicians Euclidean space, in honor of Euclid, a geometer from Alexandria who attempted more than 2000 years ago to express our intuitive spatial perception in a list of axioms. Starting from the last century, especially after the work by Bernhard Riemann, the idea of space kept evolving and moving further and further away from its Euclidean origin. This was motivated by the needs of pure mathematics, as well by the development of the sciences, first physics, joined later by chemistry, biology, information theory, etc.

Most spaces we encounter in mathematics and science cannot be visualized within our three-space: these are not like curves or surfaces; they do not come to us in visual images. Even if such spaces are intimately related to Euclidean space and we depend on them every moment in life, we do not consciously perceive them, yet exploit their properties without ever noticing them, e.g., in the course of locomotion. (The last thing a fish is aware of is water.)

How can one see such spaces; how can one study them; how can one communicate acquired knowledge to a machine—a robot designed, for example, to move in space with the agility of an animal or a human?

What aids us and what makes geometry as we practice it nowadays possible is an amazing plasticity of our spacial intuition, built into our visual and motor systems. Studying a particular branch of geometry is similar to learning to ride a bicycle: it seems impossible at first, but once you have learned, you cannot tell what the difficulty was. In geometry, however, we deal with a tower of bicycles, one idea on the top of another.

In this lecture, I will try to take the audience on an easy (maybe not that easy) ride. My purpose is twofold: firstly I want to demonstrate how unexpectedly rich and intricate the structure of the ordinary three-space is. Secondly I want to give you a glimpse of the world of invisible spaces surrounding us. Imperceivable with the naked eye, these can be seen along with the three-space when we translate our spacial intuition into a suitable geometric language.

In order to understand our three-space we have to learn how to ask questions about it. Start with a few of them. What are the structure and the essential properties of the space around us? By what means do we see and perceive it? How do we manage to move in space? What is so special about the space that makes motion possible at all?

Imagine a prehistoric geometer putting these questions to his friend, a smart Cro-Magnon hunter. Never mind that a genius able to arrive at such

私たちの三次元の世界を理解するためには、まず、そうした世界に関する質問ができるようにならなくてはなりません。例えば、「私たちの周りに存在する空間の構造や本質的な性質とはどういったものか」、「どのような媒体を介して私たちはそうした空間を見たり感じたりすることができるのか」、「私たちはどうやって空間の中を移動するのか」、「運動を可能にしている空間のどこが他と違うのか」などの疑問です。

有史以前の幾何学者がこうした問いかけを、友人で頭の良いクロマニョン人の猟師にしたとします。もちろん、その後の文明や、数世紀にわたって蓄積された科学的概念の恩恵なしに、こうした質問をできる天才は実際にはいないのですが、とにかく想像してみてください。もしも質問をされた側の猟師も彼と同様の極めつけの天才であったなら、まず、それらの質問の意味を理解するよう努力します。そして、おそらく「その質問は理に叶っているが、残念ながら答えが分からない」という結論に達したはずです。ところが彼が並みの天才であったなら、「明らかにその質問は意味をなさず、間違いなく何の役にも立たない」と答えたでしょう。曰く、「空間はただの空間であり、鳥、魚、虫など、すべての動物は空間とは何であるかを知っている。そもそも動物たちがその中を自由に動き回るという事実が、何よりの証拠である。『なぜ宇宙は存在するのか』、『人生の意味とは』など、他にもっと深遠なテーマがあるのに、なぜ、そんな愚かな質問をするのか」と。

通常の空間の本質を掴むことの難しさは、いささか逆説的です。要するに私たちは知りすぎています。私たちの視覚系、運動系は、私たちが存在する空間による影響を受けて進化し、その能力は信じられないほど高いレベルにまで達しています。もちろん、そこに至るまでには、「カンブリア紀の爆発」から5億年ほどの時間が経過しています。考えてみてください。散乱する反射光の波が私たちの目に飛び込み、網膜に化学的な刺激を与える様子を。未だ解明の糸口さえ見つかっていない神経系のプロセスによって、観察者の頭の中に首尾一貫した空間的イメージが形成されます。これらのイメージは、首尾一貫しているということに加え、空間の本当の図形を映し出しています。このことは、例えば、高等動物の視覚系と運動系の完全な調和で、彼らは幾何学や力学の法則に則った運動をし、その他目的を伴った動きをすることができるという事実によって、はっきりと証明されていると言えるでしょう。ところで、ここでは「光」は必ずしも必要ではありません。コウモリや一部のイルカは、耳だけで「見て」います。

私たちの潜在意識の中には、空間に関する知識、すなわち、幾何学的および力学的直観が豊かに存在しているのですが、こうした知識は、脳内部の順序だった推論を司

questions without the back-up of civilization and centuries of scientific thought has never been recorded in human history; imagine nevertheless. If the hunter were a comparable super-genius he would start thinking and trying to comprehend the meaning of the questions. Then he would realize that the questions made sense but he didn't know the answers. If he were just an ordinary genius, he could reply that the questions were apparently meaningless and unquestionably useless. Space is just space: birds, fish, bugs—all animals know what the space is. They see it perfectly, as is proved by their ability to move so efficiently. Why bother asking silly questions when there are truly profound ones: why does the universe exist? What is the meaning of life?

The difficulty in grasping the essentials of ordinary space is somewhat paradoxical: we know it too well. Our visual and motor systems have evolved, molded by the space we inhabit, to an unbelievable level of performance. (That took about half a billion years since the Cambrian explosion.) Just think about it: a messy flow of reflected light waves chemically excites the retina in our eyes. By a neurological process we have hardly started to unravel, this creates consistent spacial images in the mind of an observer. These images, besides being consistent, are faithful to the true geometry of the space. Convincing evidence is provided, for example, by the perfect coupling between the vision and the motor systems of higher animals that allows locomotion as well as other kinds of purposeful movements in space compatible with the laws of geometry and mechanics. (Light is not indispensable: bats and some dolphins, for instance, “see” exclusively with their ears.)

Our unconscious mind harbors a treasure of knowledge about space, a wealth of geometric (as well as mechanical) intuition but we have no direct access to this treasure since it resides far from the logical and linguistic parts of our brain that are responsible for sequential reasoning. With a painful effort through the centuries, by asking and answering correct (and often apparently meaningless) questions, we have arrived at the present understanding of our habitual space as well as other spaces; the acquired knowledge, unlike the underlying intuition, can be expressed and communicated in words and thus incorporated into culture.

What kind of language is capable of capturing the essence of space and turning it into words? What can guide us in making up such a language?

There are several interlinked languages corresponding to different branches of geometry, where each branch is concerned with a particular class of objects.

る論理、言語中枢とは位置的に離れた場所にあるので、直接アクセスすることはできません。数世紀にわたる懸命な努力で、適切な疑問を、無意味なものも多くありますが、提起し、解決することによって、私たちは、日常の空間や他の空間に関して、現在の理解を持つに至りました。見えない直観とは違って、学習した知識は、言葉で表現し、伝えることができるので、文化に組み込むことが可能なのです。

では、空間の本質を捉え、それを言葉に置き換えることのできる言語とは一体何でしょうか。そうした言語を作り上げる際の手引きとなるものは何でしょうか。

幾何学の各分野には、相互に結合した言語が存在しますが、各分野は、ある特定の対象を扱っています。計量幾何学とも呼ばれる距離幾何学とは、空間内の点と点の間の距離を持った空間に関するもので、現代幾何学では最も直観的な分野となります。これに関しては後ほど詳しく説明します。

現在、最も活発に研究が行われているのはシンプレクティック幾何学というもので、ハミルトン力学に則った物理システムの相空間など、高次元空間に与えられた面積の一般概念を研究するものです。

現代の代数方程式とその解法は、平面においては線、円、楕円を、三次元においては球、楕円面を最も単純な対象とする代数幾何学と関連して研究されています。ディオファントス幾何学と呼ばれる代数幾何学の1分野は、整数の解が求められる方程式を扱っています。

皆さんはこのような聞きなれない言葉や、曖昧な引喩に当惑されているかもしれませんが、それはもっともなことです。できることなら、「心配ご無用。それは言葉だけであって、その背後にある真実は至って簡単です」と申し上げたいのです。確かに始めのくだりはその通りで、用語の選択はかなり気ままです。例えば、なぜ「シンプレクティック」という言葉が使われるようになったのかは誰にも分かりません。ところが、そうした言葉の後ろにある真実は、実はシンプルどころかはるかに奥が深く、残念ですが、数学に王道はないのです。たとえあなたが専門の幾何学者で、距離や代数方程式のすべてを知っていたとしても、例えば「シンプレクティック」の意味を理解するには、何度も講演へ足を運び、何時間もの集中的思索が必要です。さらに、このテーマの習得には数年の歳月を要します。新しい数学テーマの学習や理解にどれほどの時間がかかり、また、非常に好意的な専門家の聴衆を相手にしていても、自分の考えを伝えるのは非常に難しいことを、経験上、承知しています。今から17年前、初めてシンプレクティック幾何学をテーマに東京で講演を行ったのですが、結果は散々でした。

Distance (also called metric) geometry is concerned with spaces equipped with distances between points. This is the most intuitive branch of modern geometry as I shall explain in detail later in this lecture.

The most active these days is symplectic geometry, where one studies a generalized notion of area assigned to high dimensional spaces, such as the phase spaces of physical systems that obey Hamiltonian mechanics.

Algebraic equations and their solutions are studied nowadays in the context of algebraic geometry, where the simplest objects are lines, circles and ellipses in the plane as well as spheres and ellipsoids in the three-space. A particular branch of algebraic geometry, called Diophantine geometry, is concerned with solving equations where the required solution must be given by integers.

You may justifiably feel disconcerted with all these strange words and obscure allusions. I wish I could tell you: “do not worry, these are just words, the truth behind them is quite simple.” The first is correct, the terminology is rather arbitrary. Nobody knows, for example, how the word “symplectic” crept in here. But the truth behind the words is incomparably more profound, and, alas, there is no King’s road to mathematics. Even if you are a professional geometer, who knows everything about the distance and algebraic equations, it will take several lectures to attend and hours of concentrated thinking to grasp the meaning of “symplectic,” while actual learning of the subject takes years. (I know, by personal experience, how long it takes to learn and appreciate a new mathematical theme and how difficult it is to communicate ideas to a most sympathetic professional audience. My first lecture on symplectic geometry in Tokyo about 17 years ago was a complete disaster.)

This is not so disappointing as it looks: as a matter of comparison, take music. The title of a particular piece may look strange, but it has little to do with what it stands for. Learning music, in the way one learns mathematics, is reading the scores till the music sounds in your head and you become able to reproduce it on a musical instrument. Once you have learned it (I speak of mathematics), you will almost never forget it: the symphony of ideas is always with you. What is missing in mathematics is something corresponding to public performance of music, transforming the musical idea of a composer into sounds and bringing it to everybody.

In the beginning, geometry was rather simple and close to naive intuition; at least it looks this way from the heights of 21st century. The first systematic language was laid down by Euclid in about 300 B.C. This language was designed

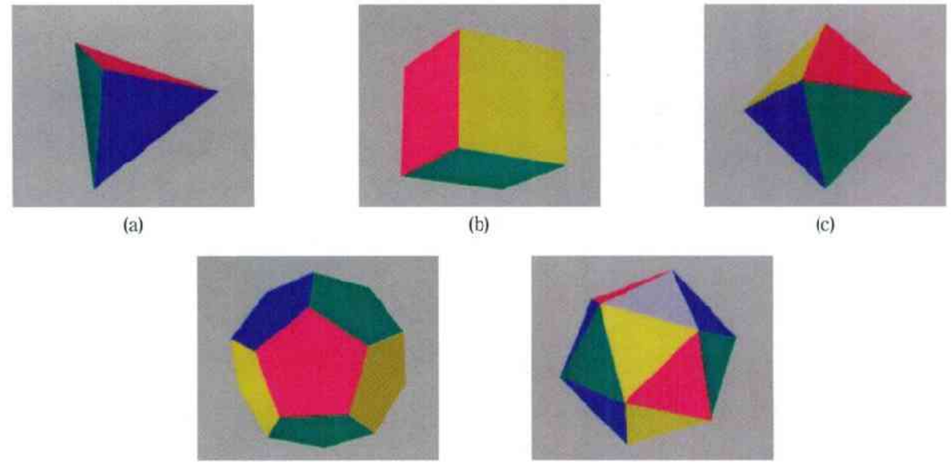
しかし、これは落胆するほどのことではないのです。例えば、音楽を例にとってみましょう。音楽作品には奇妙な題名がついているものもありますが、題名と作品の内容にはほとんど関係がありません。数学を学ぶということは、音楽で言えば、頭の中で音楽が聞こえるほど楽譜を読み込み、実際に楽器で再現できるようになることです。数学については、いったん身についてしまえば、それを忘れることはほとんどなく、概念のシンフォニーが常に頭の中にあるわけです。ただし、作曲家が自分の音楽的概念を実際の音に置き換え、聴衆に提示する「パフォーマンス」という機会は数学者にはありません。

黎明期の幾何学といえば、かなり単純で、純粋な直観に近いものでした。少なくとも隆盛を極めた現在の水準から見るとそう見えます。初めて体系的な言語が用いられるようになったのは、紀元前300年頃、ユークリッドによってでした。この言語は、ある特定の空間、すなわち、私たちが住んでいる空間を記述するためのものでした。数学的慣習に従って、私たちはこれを空間、またはユークリッドが提唱した数学的な記述にちなんで、「ユークリッド三次元空間」と呼んでいます。

幾何学の言語に関しては、幾何学は記述的な言語とだけ関係しているという印象を与えてはいけないと思っています。それは、詩といえば詩的言語、音楽といえば楽譜という考え方同様、正しい見方ではありません。漠としたイメージに帰着する直観的な幾何学と明確な言語に依存した抽象的な幾何学の間には、常にフィードバックが存在します。驚くべきことに、直観的な幾何学的概念の多くは、矛盾のない言語で定式化することができ、それによって、相互に関連する命題から成る複雑な理論が作られていくのです。一方、幾何学に限らず、直観的には魅力的な概念が、全く無意味とまではいかないまでも、誤りであることが多々あります。今も、定式化されるか、捨て去られてしまうかの審判を待っている概念がいくつかあります。

特に大きな成功を収めた概念としては、幾何学に端を発し、その後、科学のあらゆる分野に浸透した「対称性」を例に挙げることができます。平面における円や三次元空間における丸い二次元球面の完璧な対称性は、誰にでも認識できます。これらの対称性は完璧すぎるので、それを確認することはかえって困難です。このことは、ユークリッド空間自身が持つ、より基本的な対称性を反映しているのですが、このことについては後ほどご説明します。

むしろ、こうしたものよりもばらつきのある対称性を理解することのほうが簡単です。例えば、5つの凸多面体であるプラトンの立体の対称性です［図１］。



(a) (b) (c) (d) (e)

図１　５つのプラトン立体
Fig. 1　Five Platonian solids

for describing one particular space, the space we live in. Following the mathematical convention we call this space, or rather its mathematical description suggested by Euclid, the "Euclidean three-space."

Speaking about geometric languages, I do not want to project an impression that geometry is solely concerned with descriptive languages. It is no more true than thinking that poetry is all about poetic language or music is about scores. There is a continuous feedback between the intuitive geometry coming in vague images and the abstract geometry depending on a precise language. Amazingly, many intuitive geometric ideas can be cast into a formally consistent language, making an intricate web of mutually intertwined statements. On the other hand, many intuitively appealing ideas (not only in geometry) turned out to be wrong, if not plain meaningless. Some still wait to be either formalized or discarded.

An example of the most successful idea is that of symmetry, which came from geometry and then penetrated all branches of science. Everybody perceives the perfect symmetry of the circle in the plane and that of the round two-sphere in the three-space. This symmetry is so perfect that it is hard to put your finger on it. In fact, it reflects an even more fundamental symmetry of the Euclidean space itself as I shall explain later.

It is easier to appreciate less uniform symmetry such as, for example, that of "Platonian solids (bodies)," the five convex polyhedra [Fig. 1].

（a）3次元単体（正三角形で構成されたピラミッド）。これには4つの頂点と4面の正三角形があります。
（b）8つの頂点と6面の正方形で構成される立方体。
（c）6つの頂点と8面の正三角形で構成される八面体。
（d）これは他のものよりは少々分かりにくいのですが、20の頂点と12面の正五角形がある十二面体。
（e）12の頂点と20面の正三角形で構成される二十面体。

これほど対称性が高い多面体は他にありません。このことは直観的に明らかで、どれほど努力してもこれほど完璧なものはできません。しかし、今ご紹介した完璧な5つの立体と他の対称性の低い立体との本質的な性質の違いを明確に述べることは、簡単ではありません。現在では「群論」と呼ばれ、対称性という概念を正しく捉えた用語がようやくできたのは、プラトンの時代から2千年以上を経た、19世紀のことです。こうした立体が持つ本質的な対称性は、次のように説明することができます。

多面体の1つの面をFとします。このFは、多面体の種類によって、正三角形、正方形、正五角形のいずれかになります。また、Fの頂点を1つ選び、それをVとします。同様にして、面F′とF′上の頂点V′を取ります。F′は先のFと同じである可能性もあります。すると、どのような面と頂点を選んだとしても、多面体の中心を固定した回転によって、FをF′に、VをV′に動かすことができます。

このような回転によって、正多面体は元の位置と完全に重なることに注意してください。すなわち、先に選んだVだけでなく、すべての頂点は頂点へ、すべての辺は辺へ、すべての面は面へと移動します。VをV′へ移動させるだけなら、回転の前後で立体全体を重ね合わせなくても動かす方法は数多くありますが、ある面を別の面に移動させた場合、対称であるために、回転前後の2つの立体はぴたりと重なり合います。

このことは図を見れば明らかです。ところが、分かりにくいのは、今説明したような性質、つまり面、辺、頂点を自由に動かしても回転前後の立体が重なり合うという性質を持った凸多面体は、この5つのうちのいずれかであるということです。このことは、難しくはありませんが、自明でない数学的定理です。プラトンは、それらの多面体が最も完璧であると評していましたが、彼の頭の中にこの定理が存在していたのは明らかです。

(a) Three-simplex (regular triangular pyramid): it has four vertices and four regular triangular faces.
(b) Cube: eight vertices and six square faces.
(c) Octahedron: six vertices and eight regular triangular faces.
(d) Dodecahedron: this is less obvious, but it has twenty vertices and twelve regular pentagonal faces.
(e) Icosahedron: twelve vertices and twenty regular triangular faces.

There are no other polyhedra with such high symmetry. This is intuitively clear: everything you try to make does not look so perfect. Yet, it is not obvious at all how to pinpoint the essential property of the great five that distinguishes them from their less symmetric brethren. The proper language, nowadays called "group theory," adequately capturing the idea of symmetry, was developed only in the 19th century, more than the two thousand years after Plato. The essential symmetry property of these bodies can be described as follows.

Take a face of such a polyhedron, say F (this may be a regular triangle, a square, or a regular pentagon depending on which of the five polyhedra we deal with), and a vertex V in F. Now repeat the choice all over again: take another face F' (possibly equal to the first F) and a vertex V' in F' Then, no matter how we have picked these, there exists a rotation of our body around the center that moves $F \to F'$ and $V \to V'$.

Notice that this rotation moves the whole body exactly into itself so that each vertex (not only the chosen V) goes to a vertex, edges go to edges and faces to faces. (There are many rotations that transport V to V' without matching the rotated copy of the body with the unmoved one. Yet, if a face goes to a face, than all of the polyhedron must go into itself due to its symmetry.)

This is clear by looking at the picture. What is less clear, and this is a non-trivial (but not difficult) mathematical theorem, is that every convex polyhedral body with the above property (i.e., where there are rotations moving faces, edges, and vertices around with the same freedom) is necessarily one of the five. Apparently, this theorem was on the mind of Plato who distinguished his solids as the most perfect ones.

この5つのプラトン立体に続いて、13のアルキメデスの立体なるものも考案されました[図2]。

これらも高い対称性を持っていますが、プラトン立体ほどではありません。プラトンもアルキメデスも、現代の群論と同様に、対称性という直観的な概念にヒントを得ていたようですが、その後の幾何学者はこうした直観を失ったようです。私がなぜこうした結論に達したのかをご説明します。18世紀から19世紀のある時点において、アルキメデス立体の定義がなされましたが、これは平面上の正多角形の単純な定義に似たものでした。すなわち、すべての辺の長さが等しく、隣接面が成すすべての角度が等しい平面上の多面体を正多角形というものです。

証明は簡単ですが、この定義から分かるように、これらのn多角形は直感的に正多角形になり、正多角形を特徴付ける精微な対称性は、正多面体の時と全く同様に、もっと簡単に、「1つの頂点を任意の頂点に移す回転が存在する」となります。

こうした多角形には、これとは別の対称性、つまり、図形の中心を通り、辺と直角に交わる直線に関して、鏡映による対称性が存在します。鏡映による対称性はプラトン立体にも見られます。平面上の線に関する鏡映による対称性は、その線を軸に平面を空間で180度回転させれば見られますが、空間上の鏡映による対称性を理解するのはいささか困難です。ある人の左手は右手の鏡像とほぼ等しいものですが、三次元空間で動かしてみても両手がぴったりと重なることはありません。

辺と角度によるこうした正多角形の定義は、そのままプラトン立体の定義にもなります。つまり、プラトン立体とは、まさしく、すべての面が合同な正多角形であるような多面体であり、隣接面との角度がすべて等しい多面体を指します。実際は、前者の条件が成り立てば、後者の条件も自動的に成り立つのですが、これに関しては少なからず議論を要します。

19世紀以降に書かれた上級者向けの幾何学の教科書には、アルキメデス立体に関してこれと同じような記述が見られ、かつ、「証明」もなされています。1950年代後半には、ロシアの幾何学者アシュケナージが反例を発見し、「アルキメデスが見落とした完璧な立体」と呼ばれました[図3]。当時、私はまだ学生だったのですが、レニングラードのヴィクター・ザルガラーという幾何学者から、この新しく発見された立体を研究し、そこから他の幾何学的対象、つまり対称性を持つ星型多面体を構成できないかというヒントをいただきました。元々のアルキメデスの13の凸多面体から、対称性を持つ星型多面体が構成できることは知られていました。残念ながらそこからは星型

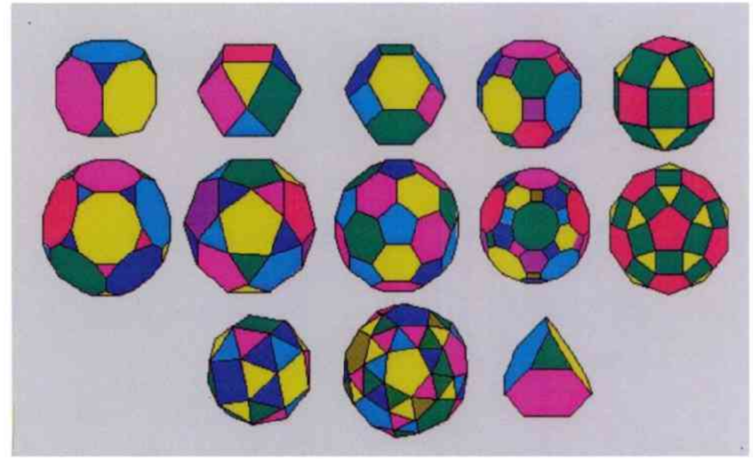


図2　13のアルキメデス立体
Fig.2　Thirteen Archimedean solids

The five Platonian solids are followed by thirteen “Archimedean solids” [Fig. 2]. These are also highly symmetric but not so much so as the Platonian ones. Apparently, Archimedes, as well as Plato, was guided by his intuitive idea of symmetry, similar to our theory of groups, but the later geometers have lost this intuition. I came to this conclusion in the following way. There was a definition of Archimedes' bodies made somewhere in the 18th or 19th century similar to the naive definition of a regular polygon in the plain, namely, a polygon in the plane is called regular if all its edges have equal lengths and the angles between all adjacent faces are mutually equal.

This definition gives (the proof is simple) exactly those *n*-gons that we intuitively perceive as regular, and where precise symmetry property distinguishes them is the same as for polyhedra, even easier: there is a rotation of such a polygon moving one vertex to another arbitrarily chosen one.

There is an extra symmetry to these polygons: they are mirror-symmetric with respect to the lines normal to the edges at their centers and the Platonian bodies possess mirror symmetries as well. The mirror symmetry with respect to a line in the plane can be implemented by rotating the plane 180 degrees in space around this line but the mirror symmetry in space is harder to grasp: one's left hand is (almost) equal to the mirror image of the right one, but the two hands cannot be matched by moving in three-space.

多面体は生まれず、この試みは失敗に終わり、アシュケナージの立体は古典的な定義は満たしているものの、アルキメデスの立体に比べると対称性が低いと認識するに至りました。失敗したままでは気分が良くないので、私は、間違っていたのはアルキメデスではなく、一般に受け入れられているアルキメデス立体の定義を作った人物であると考えました。私が思うに、この定義は、群論が幾何学の研究の道具として一般的になる前に作られたものです。しかし、一般的な文献では依然、混乱があります。

これから私がお話しする距離幾何学、別名計量幾何学という幾何学の分野は、点と点との間の距離に関する学問です。三次元ユークリッド空間における通常の距離、もしくはユークリッド距離とも言いますが、それは2点間の線分の長さを測ったものです。距離をきちんと定義するためには尺度を決める、つまり、例えばメートルやセンチメートルといった、単位となる線分を決めなくてはなりません。尺度を決めることによって、距離は空間上の任意の2点から決まる数となるのです。

通常の距離にわざわざ名前をつけて強調するのには、2つの理由があります。

まず、ユークリッド空間の基本的な性質は、距離を表す用語によってすべて表すことができるということ。

次に、たとえ私たちの三次元ユークリッド空間の中で視覚化できる空間であっても、異なった計量を持つ空間が多く存在する、すなわち距離の測り方にも様々な方法がある、ということです。

地球の表面を例に考えてみます。例えば、京都とパリを真っ直ぐ結ぶ空間線分は、地底数千キロを通ります。地底に潜ることのできない旅行者にとって、ユークリッド空間は有効ではありません。

もう少し現実的な話としては、地球表面の2つの地点を結ぶ最短の道の長さがあります。地球表面は平坦ではないため、こちらの距離は、ユークリッド距離よりもかなり長くなります。また、さらに長距離で、交通手段を利用しないといけない距離もあるでしょう。例えば、遠く離れた2点の場合、ある地点から別の地点への飛行機の飛行が幾何学以外の制約を受けなければ、最短の道は空路と言って差し支えないでしょう。さらに、距離を測る手段として、時間ではなく、燃料の消費量や運賃によって距離を定義することも可能です。こうした考え方のいくつかは、一般に受け入れられている距離の概念に適合していますが、その結果生じた幾何学的結論はかなり恣意的であり、実際には有効であっても、美意識の高い数学者にとっては、さほど魅力的なものではないのです。

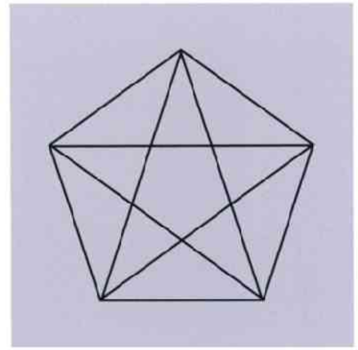


図3　アルキメデスが見落とした完璧な立体
Fig.3 Perfect body missed by Archimedes

The above edge-angle definition for regular polygons captures the Platonian bodies as well: Platonian bodies are exactly those polyhedra where all faces are mutually equal regular polygons and where the angles between all adjacent faces are equal to each other (actually, the latter follows from the former, but this needs a non-trivial argument).

A similar statement about the Archimedes' bodies was cited and "proved" in all advanced text books on geometry starting from the 19th century. In the late 1950s, a Russian geometer Ashkenazi found a counterexample that was acclaimed as a "perfect body missed by Archimedes" [Fig. 3]. When I was a student, a Leningrad geometer, Victor Zalgaller, suggested to me to look at this newly discovered body and derive from it other geometric objects, namely, symmetric star-shaped polyhedra that were known to be associated with the original 13 convex polyhedra of Archimedes. I failed, no nice star-shaped has emerged from the new polyhedron. Eventually I realized that the new body, although satisfying the classical definition, was not as symmetric as the Arcadian ones. So (to make myself feel better at my failure) I decided that it wasn't Archimedes but the author(s) of the accepted definition of Archimedes' bodies who had missed the point. (I guess this definition had been invented before group theory became a common working tool in geometry; still there is a confusion in the popular literature.)

The branch of geometry I will present to you, called distance geometry and also metric geometry, is concerned with distances between points. In the Euclidean three-space, the ordinary, also called Euclidean, distance is measured by the length of straight segments between points. To make this non-ambiguous, one needs to fix a scale, that is, to declare some segment a unit, say one meter or one centimeter, and then the distance becomes a pure number assigned to every pair of points in space.

It would not be worth emphasizing and assigning a name to this branch of geometry were it not for two reasons. First, all essential properties of the Euclidean space can be expressed in the language of distance. Second, there are many spaces, some of them visible inside our (Euclidean) three-space that come along

最短の道という考え方は、ユークリッド空間内の曲面に計量を導入する、すなわち距離を決める際に用いられます。「内的な計量」とも呼ばれるこの計量は、２点間の距離を、その２点を結ぶ曲面上の最短の道の距離とすることで、定義されます。この時、空間でこれらの点を結んでいる真っ直ぐな線分がこの曲面に含まれていない限り、曲面上の２点間の距離はユークリッド距離よりも長くなります。

例として丸い球面を考えてみましょう。これは半径を大きくした時、地球表面の近似として最適です。最短の道は、球面の上の大円をたどる線分となります。大円とは、中心を通る平面で球面を切断した切り口のことです。ところで、数学用語で「球面」というのは、丸いボールの表面の二次元曲面のことです。

今までの話は極端に単純ですが、理解するには頭の中に２つのイメージを描く必要があります。１つは地球。巨大な質量を持つ大陸と水と球面状の曲面から成ります。もう１つは空間に固定されたシャボン玉、または球体の表面です。

距離の用語で表現できる、空間の最も基本的な性質を理解するため、まずは分かりやすい２つの平面を考えてみることにします。平面、完全に平らなテーブルの表面を考え、それが透明な紙で覆われているとします。皆さんにも経験があると思うのですが、その紙は引っぱったり皺をつけたりしなくても、テーブルの上を自由に滑らせることができます。つまり、この動作を遮るものはありません。紙の上とテーブルの上にひとつずつ印を付けます。テーブルの上で紙を滑らせてやれば、２つの点を重ね合わせることができます。また、紙とテーブルに、それぞれ２つずつ印を付けたとします。紙に付けた２点間の距離とテーブルに付けた２点間の距離が同じなら、紙をスライドさせてそれぞれを重ね合わせることができます。

同じことは３つ以上の点を打った場合にも言えます。例えば、紙の上に５つ点を打ち、それぞれp1、p2、p3、p4、p5と呼び、テーブルの上にも同じように５つ点を打ち、こちらはP1、P2、P3、P4、P5と呼ぶとします。この場合も、紙の上の点pnが同じ番号を持つ点Pnに同時に重なるように、つまり、p1はP1と、p2はP2と…といった要領で重なるように、紙をスライドさせることができます。ただしこの場合、５つの点ｐのうち２点を結ぶ距離は、それに対応する点Ｐ間の距離と等しくなければなりません。つまり、p1とp2の距離は、P1とP2の距離に、p2とp3の距離はP2とP3の距離に等しい、といった具合です。

この組み合わせは全部で10組存在し、紙をスライドさせて各点を同時に重ね合わせるためには、10個の数字を持つ２組の配列が等しい、つまり、距離を表す10個の数字

with different kind of metrics, i.e., with various prescriptions of distances between their points.

Let us look at the surface of the earth. A straight spacial segment between Kyoto and Paris, for example, passes a few thousand kilometers deep underground. The Euclidean distance is no good for the travelers who stay on the surface of the Earth.

A more practical distance is the length of the shortest path between two point locations on the *surface* of the Earth. This distance is significantly greater than the Euclidean one, since the Earth is not flat. One may consider even larger distances, where one only allows routes between two points that are available to given means of transportation. For far-lying points, for instance, the (nearly) shortest path would be achieved by an air routes if the flights were not a subject to non-geometric constraints, from one location to another. Instead of time one could use the minimal amount of fuel or the cheapest price for travel as a measure of distance. Some of these conform to the accepted idea of distance, but the resulting geometries are rather arbitrary and, although practically useful, are not especially attractive to aesthetically minded mathematicians.

The idea of minimal path is used for introduction of metrics (i.e., prescribed distances) on surfaces in the Euclidean space: the metric, sometimes called "intrinsic metric," is defined by declaring the distance between two points to be equal to the length of the shortest path on this surface joining the points. (This distance between two points on the surface is greater than the Euclidean distance unless the surface contains the straight segment joining these points in space.)

For example, if we take a round sphere (a good approximation to the Earth's, surface on the large scale), then shortest are segments of great circles on the sphere: these circles are seen by cutting sphere with planes passing through the center of the sphere. ("Sphere" in mathematical jargon refers to the two-dimensional surface that bounds a round ball.)

The above is childishly simple, yet it requires an effort to keep in mind two images: the Earth, the huge mass of land and water, and that of a spherical surface, a soup bubble fixed in space or the surface of a globe.

In order to understand the most essential property of the space, expressible in the language of distance, we first try the two-plane, which is somewhat easier to grasp. Think of the plane as the top of a perfectly flat table and imagine it is covered by a sheet of transparent paper. Then, as we know from experience, one

がすべて等しい、ということが必要です。厳密には、この条件だけでは数学的に正しいとは言えません。例えば、左手の指先で紙の上に５つ印を付け、同じように右手の指先でテーブルの上に５つ印を付けた場合、これを重ね合わせるためには、テーブルの上で紙をスライドさせることと、折り返し、すなわち直線を軸として空間内で180度回転させることを、組み合わせなくてはいけません。

こうした話の重要性を充分に理解するためには、他の曲面も検討してみる必要があります。例えば、曲がったテーブルがあって、それが曲がった透明の紙で覆われていて、しかもその曲がり具合がテーブルのそれと完璧に一致しているとします。もし表面が球面である「テーブル」、つまり、球の形をしたテーブルがあるとすれば、これまで私が平面に関して申し上げてきたことはすべて正しいものとなります。球面上で球状の紙を自由に滑らせればよいのです。

球面のテーブルほど分かりやすくはありませんが、円筒形、さらには円錐形の「テーブル」についても先ほどの話は当てはまります。円筒や円錐を覆っている紙を伸ばして平面にしてやれば、テーブルの上を滑らせてやることもできますし、平面のテーブルの時と同じく自由に、円筒や円錐の曲面を滑らせることができます。しかし、このテーブルのある点は平坦で、ある点には丸い隆起があるとしたら、紙を自由に滑らせることはできません。これは、紙はこの隆起を「記憶」しているので、隆起した部分を平らな地点に動かすと、その地点ではテーブルから紙が浮き上がってしまうためです。

次に、三次元空間で同じような図を描いてみましょう。空間を覆う三次元の「紙」を口で説明するのは大変ですので、曲面について考える場合、それに合った表現を用いる必要があります。つまり今回は、曲面を覆う紙ではなく、ある曲面のコピーでその曲面とぴったり重なり合う、目には全く見えない紙を頭の中に思い描きます。こうすれば、テーブルや紙といった卑近な例を持ち出すことなく、動かない曲面、つまりテーブル面の上をそのコピー、つまり紙がスライドする様子を思い浮かべながら、曲面がそれ自身の上をスライドする様子を語ることができます。

同じ表現は、どのような空間にも当てはまります。例えば、自分自身に沿って移動する空間などです。この場合、「移動する」という言葉は、距離が保存されることを意味しています。つまり、こうした「移動」によって点pが点Pに、点p′が点P′に移動した時、点pとp′の選択に依らずに、p−p′間の距離はP−P′間の距離に等しくなります。

ここで思い出していただきたいのは、「距離」は空間に後から与えられたものであ

can freely slide the paper on the table without stretching or wrinkling it. In fact we have the complete freedom of movement: if one marks one point on the paper and another one at a different location on the table, one can move the paper by sliding it on the table so that the two marks will match; if one has two marked points on the paper and two on the table, one can match the two pairs by sliding the paper over the table, provided the distance between the points on the paper equals the distance between the points on the table.

The same remains true for many marked points. For example, let us mark five points, on the paper, call them $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$, and also five on the table, named $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$. Then we can slide the paper such that, simultaneously, each of the p-points on the paper will go to the P-point on the table with the same number (i.e. $p1 \rightarrow P1$, $p2 \rightarrow P2$, $p3 \rightarrow P3$, etc.), provided the mutual distances between the five p's equal the corresponding distances for P's: the distance between $p1$ and $p2$ must equal that between $P1$ and $P2$, etc., for all pairs of p-points.

There are ten such pairs altogether, and thus the possibility of the matching slide needs the equality of two arrays of ten numbers, that is, ten equalities between the corresponding numbers expressing the distances. (To be true to mathematical rigor, this is not correct as it stands: if one marks five points on the paper with the fingertips of the left hand and another five on the table with the right hand, then, in order to match the left and the right markings, one needs to combine sliding the paper over the table with a reflection of the plane in a line, that is, a 180 degree rotation of the sheet of paper in space around a line.)

To appreciate the significance of this one needs to look at other surfaces. Imagine we have a curved table also covered by an accordingly curved transparent paper perfectly matching the surface of the table. If the top of the "table" is spherical, a globe serving for a table, then all we have said about the plane remains true: we can slide the spherical paper on the sphere as much as we want.

Less obviously, this is also true for a cylindrical (and even conical) "table": one can unroll the paper wrapping a cylinder (or a cone) into a flat sheet; then it can be slid along itself, and thus over the surface of the cylinder (cone) with the same freedom as over the flat table. However, if our table is flat at one location and has a spherical bump somewhere else, then one can not freely slide the paper anymore: the paper "remembers" the bump and it cannot be moved away from it without this bump bulging away from a flat part of the table.

Now we want to develop a similar picture for the three-space. It is hard to

り、先ほど地球の表面上の例でお話ししたように、「距離」を決定する方法はいくつか存在するということです。特定の計量だけに関する「移動」、すなわち、1つの距離は保つけれど他の距離を変えてしまう、ということもあり得ます。例えば、地球の上の球面的計量、すなわち、地球を球面だと思った時、大円の一部が2点を結ぶ最短線となるような計量は回転によって保たれますが、先に述べた別の計量、例えば航空券の価格で決まるものは保たれません。

通常のユークリッド三次元空間は、平面、もしくは二次元球面と同様、それ自身、自由に移動することができます。三次元ユークリッド空間における2組の点の配置、例えばp1、p2、p3、p4、p5という配置とP1、P2、P3、P4、P5という配置を考えます。もし対応する2点間の距離、全部で10組がそれぞれ等しいならば、平面に関する折り返しも含む、一方の配置からもう一方の配置に移動が可能です。

こうしたことは、私たちの空間が持つ基本的性質であり、そのおかげで私たちが空間で物理的に経験する、あらゆる種類の運動が可能になっています。私たち数学者は、こうした性質をユークリッド空間の基本公理として捉えています。空間のこうした性質、公理を理解するためには、その空間と比較する何かが必要です。しかし、三次元ユークリッド空間の中では、自分自身以外の三次元空間を見ることはできないため、この作業は平面の場合よりも難しくなります。したがって、別の例を引用することが必要です。

それでは平面に戻って、先ほどと同じく、完全に平らで無限大のテーブルを考えます。今回は点ではなく、例えば細い鉛筆のような、真っ直ぐで堅い棒がテーブルの上に載っていると考えます。数学的には、平面の上の真っ直ぐな線分という言い方になります。また、棒の長さはすべて1デシメーター、つまり10cmであるとします。

ここでは、テーブル上にあるこうしたすべての棒、数学的に言えば、平面に存在する一定の長さの線分のすべてを考えます。もちろん、すべての地点においてそれぞれ違った方向に向けられた鉛筆がテーブルを覆っている光景を想像するのは難しいので、1本の棒に関して、可能な位置をすべて考えることにします。この棒はテーブルの上ならどこにでも置くことができ、ある地点から別の地点へと動かすことができます。したがって、ここで言う「すべて」の意味は、すべての位置に置くこともできるのですが、ある瞬間においてはその内のいくつかだけしか考えない、というものです。一方、頭の中ですべての棒を同時に思い浮かべることによって、「点」という言葉がテーブル上の棒の位置を意味するような、新たな空間が現れます。

speak of a three-dimensional "paper" covering the space. Thus we need a better language for the case of surfaces. Instead of introducing a paper covering a surface we just create in our mind a second copy of a given surface, a truly invisible paper perfectly matching the surface. Then we can speak of a surface sliding along itself, thinking of the copy (paper) sliding over the first unmoved copy (the top of the table) without any explicit reference to such mundane objects as tables and paper.

The same language applies to any space: we may speak of moving space along itself, where the word "move" signifies the preservation of distances: if in the course of such a move, a point p goes to some P and another point p' goes to P' then the distance between P and P' must be equal to that between the original points p and p' for all possible choices of the points p and p'.

Recall that "distance" is something attributed to a space and there may be several ways to assign distances as we have seen on the surface of the Earth. It may happen that some move is admissible for one metric, i.e., it preserves this distance, but does change another one. For example, the spherical metric on the Earth (where the shortest lines are segments of great circles in the spherical model of the Earth) is preserved by rotations of the sphere, but other metrics we described (e.g., defined by the price of tickets) are not.

The ordinary Euclidean three-space can be moved along itself with the same freedom as the plane (or the two sphere): given two configurations of points in the Euclidean three-space, say $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$ and $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ with mutually equal distances between the corresponding (ten) pairs of points, then there is a motion (including symmetries in some planes) of the whole space moving one configuration into the other.

This is the basic property of our space, allowing all kinds of motions we physically experience in space. As mathematicians, we take this property as a basic axiom of the Euclidean space. Here again, to appreciate this property (axiom), one needs something to compare our space with. This is more difficult than in the case of the plane, since other three-dimensional spaces cannot be seen inside the Euclidean one. Thus we need another source of examples.

Let us return to the plane, a perfectly flat infinite table as earlier, but now instead of points let us think of straight rigid rods, e.g., thin pencils, lying on the table. Mathematically speaking, we are dealing with straight segments in the plane. We agree that the rods have unit length (say one decimeter=10 cm).

We want to consider *all* such rods on the table, or, mathematically, *all* unit

この棒の空間を正しく認識するには、その幾何構造を調べる必要があります。ちなみに、本日の講演では、「幾何構造」とは「距離」を意味します。棒と棒の間の距離を計測できれば、こうした棒の空間も、ユークリッド空間とは異なった距離を持つ通常の三次元空間であり、点はあくまでも点で、「棒」のことは忘れても構わなくなります。

数学で扱う概念の多くは、研究対象の性質をいくつか「忘れる」ことによって得られているのです。例えば、普通の平面は現実世界に存在する平面を抽象化したものですが、例えばその色、質感などは忘れ去られています。忘れることによって、研究対象となる性質だけを抽出することができるのです。そのおかげで、「三次元空間におけるすべての点」と「平面上の一定の長さのすべての棒」など、異なる対象の間に予期していなかった類似点を見出すことができるのです。例えば、1本の棒だけを考えた場合、空間の1点と共通するようなところはほとんどありません。しかし、その距離で表される棒と棒の関係だけに注目するなら、平面上の棒の完全性はユークリッドの空間にかなり似ているといえます。

さて、これからが大事なポイントです。平面上にある棒と棒の間の距離をすべて求めるのです。距離というものは神によって与えられるものではないので、私たちが距離を構成するのですが、使える空間を得るためには、慎重に構成しなくてはなりません。私たちは、空間内の曲面上に距離を定義したのと同じ概念を用います。曲面上の距離は、2点を曲面上で結ぶ最短の道の長さによって定義されていました。では、2つの棒を結ぶ「道」とは、どのようなものでしょうか。1つ、自然な候補があります。「道」とは、棒1から棒2への移動といったように、与えられた位置から平面内で棒を動かす、その連続した動きのことです。

棒をいずれかの方向に動かすと、その両端も平面に沿って動きます。ここで、例えば一方を緑、他方を青に塗ったと考えると、平面に2本の曲線が描かれることになります。緑の曲線は棒1の一端から棒2の一端へ、青い曲線も、同じく棒のもう一方の端を結びます。

この、緑と青という2つの道を併せた距離を測るには、どうすればよいでしょうか。

単純に考えると、合計を求めれば良いということになります。これは可能ですが、最良の選択であるとは言えません。ピタゴラスの定理を使えば、より良い距離を定義することができます。つまり、2本の曲線の長さをそれぞれ平方したものを合計し、その平方根を求めるというやり方です。しかし、本当に2本の長さを「併せる」ためには、これよりも複雑なプロセスを必要とします。もちろん、このやり方も、お互い

segments in the plane. Of course, this is impossible to imagine: the whole table covered by pencils, where the pencils at all points are directed at all angles. It is better to think of all possible positions of a single rod. A rod can be placed anywhere on the table and moved from one position to another. So our "all" means that we allow all positions but at every moment we shall be concerned with a few of them. On the other hand, by considering all rods simultaneously we create in our mind a new space where the word "point" stands for a particular (position of a) rod on the table.

To justify this we need to identify a geometric structure in this space of rods and in the context of this lecture, "geometric structure" signifies "distance." Once we can measure the distance between rods, we can think of this rod-space as a kind of ordinary three-space with a distance different from the Euclidean one where points are just points, with no memory left of the rods.

Many mathematical constructs are obtained by "forgetting" some of the properties of the objects we study. For example, the ordinary plane is an abstraction of a flat surface in the real world, but we forget many things, e.g., the color, the texture, etc. This forgetting serves to isolate the properties we want to study. As a benefit, we find unexpected similarities between rather different objects, such as "all points in the three-space" and "all unit rods in the plane." Observe that an individual rod has little in common with a point in the space. However, the totality of rods in the plane is rather similar to the the Euclidean space insofar as we are concerned exclusively with the mutual relationship between the rods expressible in term of the distances between them.

Now we come to the crucial point: we want to find a distance between every pair of rods in the plane. There is no God-given distance. We have to invent one, but this should be done with certain prudence if we want to obtain a usable space. We follow the same idea as for the distance on a surface in space, where it is defined as the length of the shortest path between the points in the surfaces. But what is a "path" between two rods in the plane? Here there is an obvious candidate: a path is a continuous motion of the rod in the plane bringing it from one given position, say, rod 1, to another one, rod 2.

As we move a rod in some way its two ends move along in the plane. We imagine the ends of the rod are colored, say, one end is green and another blue, and thus we get two curves in the plane: one curve, the green one, goes from the first end of rod 1 to that of rod 2; and the second, the blue one, joins the second

のスピードが異なることもあるでしょうが、両端が一定のスピードで動くのであれば可能です。

残念ながら、単純で「自然な」距離を導き出してくれる正しい定義は、さらに複雑です。これからお話しする定義は分かりにくいものですが、それは不必要な複雑さが求められているからではなく、人間の頭脳はこの種の問題を考えるようにできていないためです。この「本当の」定義が発見されるまでには、何世紀にもわたる数学者や物理学者による真剣な研究と、リーマンほどの天才が必要でした。また、リーマンの定義は簡単に理解できるようなものではなく、その「真実性」は、数学、科学、工学の分野における応用への有用性から明らかになります。数学における定義とは、私たちがすでに知っていて理解も進んでいる対象を特定する言葉に止まらず、本質的な概念、そしてそれは難しいものであることが多いのですが、そのような概念を具体化する創造行為でもあるのです。

それでは、その定義を説明します。ここに平面内を移動する棒があります。例えば、ある地点から別の地点への移動が完了するのに1分かかるとします。そして、より小さな単位で、棒の位置の連続した動きを記録します。例えば、秒単位で記録すると、棒の動きは60の小さなステップに分割されます。この棒は毎秒、ある地点から、それほど遠くない次の地点へと移動していきます。この時、各ステップにおいて、棒の両端に対応する位置の通常の距離、すなわち、隣り合う2つの緑の2点間の距離、同じく隣り合う青い点同士の距離を測ります。ピタゴラスの法則を用いて、それぞれの「緑」の距離に対応した「青」の距離を「加え」ます。つまり、それぞれの平方を合計し、その平方根を求めます。最後に、このようにして求めた60個の数字を加え、その合計を「秒を尺度とした動きの道の長さ」とします。

より精緻な数字を求めるのなら、ミリ秒など、さらに小さな時間単位を用います。そうすればこの動きは6万の細かなステップに分割されます。各ステップは先ほど説明した方法で処理され、6万の小さな項の合計が「ミリ秒を尺度とした、同じ動きの長さ」となります。

ほとんどの実用的な目的には、これで充分なのですが、数学者は任意に固定された尺度を好みません。これにはもっともな理由があるのですが、とにかく、時間の尺度は徐々に小さくなり、最終的には、こうしたより高精度の計測による極限値として、真の長さ、すなわち、実際には測れない長さを定義することになります。ちなみに、分子物理学者だったら、1秒の10億分の1のさらに100万分の1であるフェムト秒で

ends of the rods.

How can one measure the joint length of these two paths, the green one and the blue one together? A naive idea is to take the sum of the two. One can do that, but this is by no means the best choice. A better distance may be defined with the Pythagorean theorem in mind, which suggests taking the square root of the sum of squares of the lengths of the two curves. But the true (double) length is trickier than this. (The above is OK if the two ends move with constant, possibly different, speeds.)

Unfortunately, the correct definition, which eventually leads to a simple "natural" distance, is more complicated. The definition that is about to come is difficult to grasp, not because we want unnecessary complexity, but because Nature has not designed our brain for this kind of problem. This definition, the true definition, took the genius of Bernhard Riemann to discover following centuries of intense thinking by mathematicians and physicists. One is not supposed to absorb it easily, and the "truth" of Riemann's definition becomes clear only a posteriori by its successful use in mathematics, science and engineering. (Definitions in mathematics are not just words assigned to objects that we already know and understand well but are acts of creation crystallizing essential, and often difficult, ideas.)

Now comes the definition. We have our rod moving somehow in the plane. Say, the full motion from one position to another takes one minute. We record the successive positions of the rod in smaller units, e.g., in seconds. Thus our motion is divided into sixty small steps: every second the rod moves from some intermediate position to the next one, which is rather close to the preceding position. At every such step, we take the two ordinary distances between the corresponding positions of the ends of the rod, one distance between two consecutive green points and the distance between the corresponding blue ones. We "add" each green distance to the corresponding blue one by the Pythagorean rule, i.e., we take the square root of the sum of their squares. Finally, we add the resulting sixty numbers and call the sum the "length of (the path of) the motion on the scale of seconds."

If we need more precision, we can use a finer time scale, say milliseconds. Then the motion is divided in to 60,000 tiny steps, each of which is treated as earlier, and the sum of 60,000 small terms adds up to the "length of the (same) motion on the scale of milliseconds."

This may be sufficient for most practical purposes, but mathematicians do not

止めるでしょう。

こうして私たちは、平面内の棒と棒の距離の定義にようやくたどり着くことができました。２本の棒の間で可能な道をすべて考え、それぞれの道について先に述べた真の長さを測りましょう。その中で最短の長さを棒と棒の間の距離とします。

さて、なぜこれほど面倒なのでしょうか。その答えは、「私たちが自ら選択したのではなく、数学や物理学の性質上、定義せざるを得ないから」となります。では、このことを確かめてみましょう。

距離という概念を認めれば、意味のある質問ができるようになるかもしれません。まずは、距離はどのようにして決定されるのか、２本の棒を結ぶ最短の道とは、などの疑問が考えられます。

手始めに、２本の棒の最短距離は、両端を直線に沿って動かすことによって得られる、と推測してみます。このアプローチはさほど悪いものではなく、２本の棒が平面内で平行に並んでいる場合には、正解が得られます。しかし、２本の棒がねじれの位置にあった場合、例えば、２本の棒が一端でしか接しない場合、こうした動きは不可能となります。これは、移動中に棒の長さは変化しないことになっているからです。

さて、平面上で２本の棒の緑の端が、ある角度で接しているとしましょう。この場合、明らかに、２本の棒を結ぶ最短の動きは、その内の１本の、固定された緑の端を中心とした回転になります。この時、注意していただきたいのは、回転の方向は、時計回り、逆時計回りの２種類あることです。ここでは、回転角度が180度未満のほうを取りますが、この時、避けては通れない曖昧さにぶちあたります。もし青いほうの端がお互いに逆の方向を向いていて、２つの角度が両方ともちょうど180度だった時です。つまり、この場合、最短の道が２つあることになります。これにより、私が今お話ししている空間は、与えられた２点間の最短の道、すなわち、真っ直ぐな線分はたった１つしかない、というユークリッド空間とはきわめて異なることになります。

これと似た状況は、球面の場合に起こります。球面上では、最短の道は大円の線分であるので、２点が北極と南極のように正反対の位置にあれば、最短の道は無限に存在します。子午線に沿って南極から北極へ移動する場合、その距離はすべて等しいというのと同じことです。

実際、任意の位置にある２本の棒の最短の道は、次のように言い表すことができます。直線に沿って棒の中心を一定の速度で動かし、同時に中点を中心にして棒を回転させます。２本の棒の間には、こうした道がいくつかあるでしょうが、全体の回転角

like (and for a good reason) arbitrarily fixed scales. Thus one takes smaller and smaller time scales (a molecular physicist would stop at femptoseconds, one millionth of the billionth part of a second), eventually defining the true, scaleless length as the limiting value of these more and more precise measurements.

Finally, we arrive at the definition of the distance between rods in the plane: imagine all possible paths between two rods, measure the above true length of every path, and take the smallest of these as the distance between the rods.

Now, why all this mess? The answer is: “It is not our choice, the nature of mathematics and physics dictates this definition.” We shall justify this below.

Granted the notion of distance, we may start asking meaningful questions. First of all, how can one determine the distance, what is the shortest path between two rods?

One may start with a guess that the shortest way to go from one rod to another is by moving the ends along straight lines. It is not so bad and gives the correct answer if the two rods are parallel in the plane. But if there is an angle between the two, e.g., the two meet at an end with an angle, such motion is impossible, since, remember, the rod is not supposed to change its length along the way.

Now, suppose the rods meet at their green ends on the plane at some angle. Then, clearly the shortest motion joining them is given by rotation of one of them around the fixed green end. Observe that there are two such rotations, clockwise and counter-clockwise. We take the one that makes an angle of less than 180 degrees. There is an unavoidable ambiguity if the blue ends point in opposite directions and both angles are exactly 180 degrees. In this case, we have two shortest paths between the rods! This makes our space quite different from the Euclidean one, where there is exactly one shortest path between given points, namely, the straight segment.

The situation here is somewhat similar to that on the sphere, where the shortest paths are segments of great circles: if two points are opposite each other on the sphere, as the North and South Poles, then there are an infinite number of shortest paths: one may travel from the South Pole to the North Pole along any meridian, they are all equally long.

Actually, one can describe the shortest paths between arbitrarily positioned rods as follows. Move the center of the rod along the straight line with constant speed and simultaneously rotate the rod around its center. There may be several

が180度を越えないほうを最短の道とします。

こうした複雑な定義では、これが本当に最短の道であり、その長さが細分化のプロセスを経て得られた距離となることを示すことは容易ではありません。「なぜ、この表現を唯一の定義として使用することができないのか」と思われる方もいるでしょう。これから見ていきますが、「この例に関しては、唯一の定義とすることは可能であるが、この複雑な定義の利点は、類似した空間すべてに応用が可能である」というのが答えです。

最後に、平面内の棒に拘って、より高度な質問を考えてみましょう。棒空間はユークリッド空間と同じような対称性があるのでしょうか。例えば、棒空間に2つの点が与えられている場合、棒空間全体をそれ自身に沿って動かし、2点を重ねることができるのでしょうか。

その答えは「イエス」です。その根拠は、数学者が言うところの「自明な補題」という、これから述べる単純な考察です。

テーブルを覆っている紙に2本の棒がついていて、その紙を別の位置に滑らせたと考えてみてください。棒は紙と一緒に動き、ここが大事なのですが、棒と棒の間の距離は、紙を滑らせている間に変わることはありません。つまり、紙を滑らせることは、棒同士の距離を変えない移動を棒空間に与えたことになります。

さて、こうして紙を滑らせることで、ある棒を別の棒へと移動させることができることが分かりました。したがって、平面内の棒で表されるある点から別の点、つまり別の棒へと向かう移動が、実際に存在することになります。このように、棒空間にも、ユークリッド空間の時と似た、ある種の対称性が存在することになります。

今お話ししたことは、自明のことを、難解な専門用語で大げさに表現した単なる空虚な言葉遊びに過ぎないように聞こえるかもしれませんが、それはさておき、次の問題に移りましょう。棒空間に2組の点があるとして、点の間の距離が2組とも同じとします。1組目の点が2組目の点に重なるように棒空間を動かすことはできるでしょうか。

これがユークリッドの空間、平面、球面なら、その答えは、先に説明した通り、「イエス」となります。しかし、棒空間では「ノー」となります。つまり、棒空間は通常の空間と比べて対称性が低い、すなわち、可動性が低いということになります。平行に並んだ1対の棒を平行ではない1対の棒に移動させることは、どのように平面を滑らせても不可能である、というのを理解するのは簡単です。ただし、この場合も、互

such paths between two rods, and one needs the one where the overall rotation does not exceed 180 degrees.

With our complicated definition, it is not easy to show this is indeed the shortest path whose length gives us *the* distance defined via the subdivision process. One may ask: "Why could one not use the above description as *the* definition." The answer is: it is possible to do so for this particular example, but our messy definition has an advantage of being applicable to *all* similar spaces, as we shall see in a minute.

Finally, still sticking to rods in the plane, we ask a more sophisticated question: does the rod space have symmetry similar to that of the Euclidean space? For example, given two points in the rod-space, can one move the whole rod-space along itself so that one point goes to the other?

The answer is "yes" due to the following simple observation (which a mathematician would call a "trivial lemma").

Imagine we have two rods attached to the paper covering the table and then slide the paper to a new position. The rods move along with the paper and, this is the key point, the rod-distance between the attached rods doesn't change in the course of the slide. In other words, the paper slides give us motions of the rods space that do *not* change the rod-distance.

Now, we know that one can move a given rod to any other rod by such a slide; therefore, there is a bone fide motion of the rod-space moving a given point (represented by a rod in the plane) to any other point (rod). Thus the rod-space does have a kind of symmetry similar to what happens in the Euclidean space.

The above may look (to some extent justifiably) like just a silly word game, where something obvious is pompously pronounced in an obscure jargon. Never mind and turn to the next question: given two pairs of points in the rod-space with mutually equal distances between the points in the pairs, can one move the rod-space such that the first pair of points goes to the second one?

If it were the Euclidean space, the plane or the sphere, the answer would be "yes," as we have seen already. However, it is "no" in the rod-space. Thus the rod-space is less symmetric (or less movable) than the ordinary space. (It is easy to realize that no sliding of the plane can move a pair of parallel rods to non-parallel ones, although the distances may be arranged to be equal. But in order to have a convincing "no," one needs to rule out possible motions of the rod-space that do not come from any paper sidings. To do this one is obliged to enter into a more

いに距離を等しくすることは可能です。しかし、確信をもって「ノー」と言えるようになるには、棒空間のすべての移動は、紙を滑らせることによって得られるものしかない、ということを確かめる必要があります。そのためには、さらに抽象的な推論を行う必要がありますが、今回の講演では、このお話はいたしません。

棒の話は飽きてきましたので、今度は、三次元空間にある大きさの等しい正三角形を考えることにしましょう。こうした三角形の動きがたどる道はどれも、空間における３本の曲線、すなわち、３つの頂点の軌跡によって与えられます。一般的な定義では、棒の場合と同じく簡単に、それとも複雑でしょうか、この３本の曲線から、距離を求めることができますが、今回は、最短の道をはっきりと決める作業は先ほどのように単純ではありません。まず、棒の空間は三次元であり、棒の位置は緑の端の座標２つと、固定方向に関する角度により決定されます。三角形の空間はその倍、すなわち六次元です。最初の頂点の位置は３つの自由度によって、２つ目の頂点は２つの球面座標によって、３つ目の頂点は角度によって表されます。

こうした空間の良いところとは何でしょうか。距離はどのように使うのでしょうか。こうした空間を導入する、本質的な理由を１つご説明します。

私たちが定義した距離とは、ニュートン力学の法則により記録されるように、自然界により選ばれた距離です。摩擦を考慮せず棒を押したなら、その棒は私たちが求めた最短の道に正確に沿って、平面上を滑っていくことでしょう。同様に、重力を無視すれば、空間の三角形も、私たちが求めた複雑な定義が規定する道を通って動いていくことでしょう。しかし、これには若干の修正が必要です。一般に、自由な力学的運動が本当に最短であるのは、短い時間に限られます。例えば、固定した中心の周りを自由に回転する棒は、回転の角度が180度を越えない限り、最短の道をたどります。

同じことが考え得るすべての力学的な概念、棒や三角形の系、さらに、ある点で重なり、その点を中心にして自由に回転するようなものすべてに当てはまります。こうしたものの空間における自由運動はすべて、それぞれの高次元空間において、最短の、より正確に言うなら、局所的に最短の道を通ります。したがって、こうした空間に関する幾何学的知識は、実用本位の力学や工学に欠かせないものとなります。ただし、重力や他の力を考慮に入れる必要から、幾何学に手を加える必要が度々あります。

こうしたタイプの空間は、多岐にわたっており、その幾何学も非常に複雑なものとなります。しかし、距離という統一した言葉を使うことによって、その性質を確立し、表現することができます。エンジニアの関心は、具体的な実用問題に必要な、こうし

abstract reasoning that I dare not to present in this lecture.)

Tired of rods, let us turn to regular triangles of unit size positioned in three-space. Every path of motion of such a triangle is given by three curves in space, the trajectories of the three vertices. The general definition allows us to make the distance out of such triples of curves with the same ease (mess?) as for rods, but now the explicit determination of shortest paths is not so simple. (Observe that the space of rods is three-dimensional: the position of a rod is given by two coordinates of its green end and the angle with respect to a fixed direction. The space of triangles is twice as big: its dimension is six: two degrees of freedom for the position of an end, two spherical coordinates for the second end, and an angle for the third.)

What is so good about such spaces, what is the use for our distance? Here is one of the essential reasons for introducing these spaces.

The distance we defined is the distance chosen by Nature as recorded by the laws of Newtonian mechanics: if we forget about friction and give the rod a push, it will slide on the plane exactly along our shortest path. Similarly, a triangle in space, away from gravity, will also move along a path prescribed by our complicated definition. (This needs a little correction: in general, a free mechanical motion is truly shortest only for not very long time intervals. For example, a rod freely rotating around a fixed center follows the shortest path insofar as the rotation angle doesn't exceed 180 degrees.)

The same applies to every imaginable mechanical contraption, any system of rods, triangles and whatever joined at some points and left free to rotate around these points. Every free motion of such a thing in space will follow the shortest (to be precise, locally shortest) path in the corresponding multidimensional space. Thus knowledge of the geometry of such spaces is indispensable in practical mechanics and engineering (where one often has to modify the geometry in order to incorporate gravity and other forces).

The spaces of the above type are very diverse and their geometry may be quite complicated. Yet, one can establish and describe their properties in the unified language of distance. Engineers are concerned with specific instances of these spaces needed for concrete practical problems, e.g., designing a motion moving a system from one position to another. Mathematicians, on the contrary, are after properties common to all such spaces. Here is an instance of this: given two equal triangles in space, there always exists a shortest path between them.

た空間の具体例にあります。例えば、ある系をある位置から別の位置へと移動させる運動を設計することなどです。これとは逆に、数学者は、こうした空間すべてに共通する性質を追い求めます。1つ例をご紹介します。空間に2つの合同な三角形があるとして、この2つの三角形の間には、常に最短の道が1つあるとします。ここで「最短」というのは、平面内の棒の空間の距離と同様に定義される、六次元空間の距離に関して最短、という意味です。

力学的に言えば、ある三角形を一押しすると、その三角形が移動する間に、別の三角形とピタリと重なる瞬間がある、ということになります。

このことは、重力が存在していても当てはまります。そうした三角形を壁に投げつけ、仮に最初の頂点としましょうか、その頂点が壁にぶつかった瞬間、あらかじめ決めておいた方向に跳ね返らせることも可能です。これを実際に行うことは簡単ではありませんが、これを完璧にやってのける投てき機を設計することはできるのです。なぜなら、そうした設計は、一般的な理論によって可能となるからです。

最後に、もう少し複雑な例をご紹介します。ちょうど車1台分しかスペースがない場所への縦列駐車です。最終的な車の位置が最初の位置からどれほど近くても、うまく駐車するためには、車を何度も前後に動かさなければなりません。

ここで関係する空間は、先ほどお話ししました棒空間です。車の位置は2つの点、ここでは2つの印を付けることによって決定されます。1つは車の前部に、もう1つは後部に付けます。しかし、車の動きには制約があるので、関係する距離は全く違ったものになります。滑って移動する棒とは違い、前後の車輪が90度回転しない限り、横方向など、車を好きな方向に動かすことはできません。しかし、誰もが経験で知っているように、そして数学の定理でも確認されているように、車をある地点まで移動することは可能なのですが、自由に滑らすことのできる棒に比べると、かなり時間がかかります。

また、トレーラー付きの車を駐車することは難しいですが、できないことはありません。実際、経験豊かなドライバーならできます。この場合、対応する空間は、2本のつながった棒の空間であると考えることができます。そして、その空間は四次元です。さらに、この駐車の問題は、トレーラーが何台付いていても、数学的な解決が可能です。人間のドライバーがこれを習得するということは考えにくいのですが、ロボティクスなど、力学装置の制御理論に出てくる同様の問題は、対応する高次元空間の幾何学を応用したコンピュータ・プログラムで解決することが可能です。

(Remember, "shortest" refers to the distance in the six-dimensional space of triangles defined in the same manner we introduced the distance in the space of rods in the plane.)

In mechanical terms, one can give one triangle an initial push, such that in the course of its motion it will take, at some moment, the exact position of another triangle.

This is also true in the presence of gravity: one can throw such a triangle at a wall, such that it hits the wall by its (say first) vertex and at the moment of collision will have a prescribed orientation in space. (It may be hard to do it if you try, but one can design a throwing machine doing it perfectly well, where the very possibility of such design is guaranteed by the general theorem.)

We conclude with a more complicated example, namely, we look at parallel parking of a car where the space where you have to squeeze in is barely sufficient. Even if the eventual position of the car is quite close to the original position one may need many goings back and forth in order to perfectly park.

The relevant space here is our old rod-space: the position of a car is determined two points, say two marks, one is at the front and the other at the back of the car. However, the relevant distance is quite different due to constraints on how a car can move. Unlike the sliding rod, one cannot move a car arbitrarily, e.g., sideways (unless the front and the back wheels can be turned 90 degrees). Yet, as we know from practice, and this confirmed by a mathematical theorem, one still can move a car to a given position, but it may take much longer than for the freely sliding rod.

It is more difficult, but yet possible, to park a car with a trailer, and an experienced drive can do this. Here, the corresponding space can be viewed as the space of two joined rods, and it has dimension four. Moreover, the parking problem admits a mathematical solution for any number of trailers. It is unlikely a driver can ever learn how to do this. Yet similar problems that appear in control theory of mechanical devices, e.g., in robotics, can be resolved with computer programs relying on geometry of the corresponding multidimensional spaces.

All of the above is supposed to give you a feeling of how geometric concepts are being created and applied. The geometric approach is not omnipotent; yet it often helps in solving difficult practical problems arising in mathematics, science and engineering.

今までのお話はすべて、幾何学的概念がいかにして構成されており、応用されているかをご理解いただくことを願ってさせていただきました。幾何学的なアプローチは万能ではありませんが、数学、科学、工学などの分野における難題の解決に役立つことが度々あるのです。

稲盛財団2002——第18回京都賞と助成金

発　　行　2004年3月1日

制　　作　財団法人稲盛財団

京都市下京区四条通り室町東入ル函谷鉾町88番地　〒600-8009

電話〔075〕255-2688

ISBN4-900663-18-2 C0000